



TÉCNICO LISBOA

O Modelo Standard das Interações EletroFracas

(Versão de 2017-2018)

Jorge Crispim Romão

Departamento de Física
2017

Conteúdo

1	Teoria Clássica dos Campos	1
1.1	Equações de Euler-Lagrange	1
1.2	Simetrias e Leis de Conservação. Teorema de Noether.	3
1.3	Simetrias internas	4
1.4	Simetrias do espaço-tempo	8
	Problemas Capítulo 1	11
2	Invariância de Gauge	13
2.1	lagrangeanos em Mecânica Clássica	13
2.2	lagrangeanos em Teoria de Campo	14
2.3	Invariância de Gauge. O eletromagnetismo	16
2.4	Teorias de Yang-Mills	19
2.5	Regras de Feynman para a teoria de gauge	23
	2.5.1 Propagadores	23
	2.5.2 Vértices	23
	Problemas Capítulo 2	25
3	Quebra Espontânea de Simetria: Mecanismo de Higgs	29
3.1	Introdução	29
3.2	O Teorema de Goldstone	35
3.3	O mecanismo de Higgs	40
	Problemas Capítulo 3	46
4	As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A	47
4.1	A Teoria de Fermi	47
4.2	A teoria V-A	48
	4.2.1 Introdução	48
	4.2.2 Violação de paridade nas interações fracas	49
	4.2.3 Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica	50
	4.2.4 A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann	51
4.3	As interações fracas dos hádrons	53
	4.3.1 Universalidade e a teoria de Cabibbo	53
	4.3.2 O mecanismo de GIM e a descoberta do charm	56

4.4	A hipótese do Bosão Vetorial Intermédio	59
4.5	Problemas com a teoria corrente-corrente	60
4.5.1	Violação da unitariedade na interação de Fermi	60
4.5.2	Violação de unitariedade no modelo IVB	62
	Problemas Capítulo 4	65
5	O Modelo Standard Eletrofraco: $SU(2)_L \times U(1)$	67
5.1	Introdução	67
5.2	O sector de gauge	68
5.3	As interações fracas dos leptões	70
5.3.1	As representações e números quânticos	71
5.3.2	As correntes carregadas	73
5.3.3	As correntes neutras	75
5.4	A introdução dos quarks	76
5.5	A Massa dos Fermiões	78
5.5.1	A massa dos leptões	78
5.5.2	A massa dos quarks	80
5.6	Exemplos	83
5.6.1	Colisão elástica eletrão-neutrino	83
5.6.2	O decaimento do muão	83
	Problemas Capítulo 5	84

Capítulo 1

Teoria Clássica dos Campos

1.1 Equações de Euler-Lagrange

O objecto básico em teoria dos campos (clássica ou quântica) é o *Lagrangiano*. Este é uma função dos vários campos (que designaremos colectivamente por Φ) e das suas primeiras derivadas em relação às coordenadas ($\partial_\mu \Phi$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (1.1)$$

Mais rigorosamente a função \mathcal{L} devia ser designada por *densidade lagrangeana* relacionada com o Lagrangiano L por

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (1.2)$$

Então a acção S é dada por

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L} \quad (1.3)$$

A dinâmica é obtida a partir dum princípio variacional. As equações de movimento são dadas pela estacionaridade da acção. Obtemos então

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] \delta \Phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para variações arbitrárias devemos ter a expressão entre parenteses igual identicamente a zero, pelo que obtemos as equações chamadas de *Euler-Lagrange*,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] = 0 \quad (1.5)$$

Exemplo 1.1 *Consideremos o campo escalar neutro sem interações (livre) descrito pelo seguinte lagrangeano:*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.6)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \phi \quad (1.7)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \phi \quad (1.8)$$

Então a equação do movimento é a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.9)$$

onde o operador de d'Alembert é dado por

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu . \quad (1.10)$$

Exemplo 1.2 *Seja um campo escalar carregado descrito por um campo complexo, pelo do lagrangeano*

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.11)$$

Aplicando a equação de Euler Lagrange obtemos

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= 0 \\ (\square + m^2)\phi^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

ou seja de novo a equação de Klein-Gordon para ϕ e para o seu conjugado complexo.

Exemplo 1.3 Consideremos agora o campo de spin 1/2 livre descrito pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi \quad (1.13)$$

onde como habitualmente¹

$$\begin{aligned} \rlap{-}\not{\partial} &= \gamma^\mu \partial_\mu \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

A equação de movimento é então a equação de Dirac

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (1.15)$$

1.2 Simetrias e Leis de Conservação. Teorema de Noether.

Normalmente as teorias de interesse para a Física possuem um certo número de invariâncias ou simetrias. Temos uma *invariância global* se é possível efectuar uma transformação infinitesimal

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \delta\Phi \quad (1.16)$$

tal que 1.16 satisfaz as seguintes condições

- i) Deixa \mathcal{L} invariante, isto é $\mathcal{L}(\Phi') = \mathcal{L}(\Phi)$.
- ii) É a mesma em todos os pontos do espaço-tempo.

Dizemos ainda que uma simetria é *interna* quando as transformações não misturam campos com propriedades espaço-temporais diferentes. Mais precisamente, as

¹Para os leitores não familiares com a equação de Dirac recomendamos a leitura do primeiro capítulo do livro *Introdução à Teoria do Campo* [1].

simetrias internas correspondem a transformações que comutam com o *Grupo de Poincaré*².

Os exemplos 1.2 e 1.3 do parágrafo anterior correspondem a teorias que possuem uma invariância interna global, enquanto que o exemplo 1.1, o campo escalar neutro, não tem. De facto o lagrangeano do exemplo 1.1 também tem uma simetria, mas é discreta

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi \quad (1.17)$$

Nós aqui vamos considerar somente as simetrias que correspondem a transformações contínuas que possam ser arbitrariamente pequenas, isto é, *infinitesimais*.

Voltando aos outros exemplos, escrevamos explicitamente as transformações que deixam os lagrangeanos invariantes. Assim para o *campo escalar carregado* temos

$$\delta\phi = i\alpha\phi \quad ; \quad \delta\phi^* = -i\alpha\phi^* \quad (1.18)$$

onde α é uma constante infinitesimal. Para o *campo spinorial* livre temos

$$\delta\psi = i\alpha\psi \quad ; \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi} \quad (1.19)$$

É trivial verificar que as Eqs.1.18 e 1.19 deixam 1.11 e 1.13 invariantes, respectivamente.

Sempre que uma teoria possua invariâncias é de fundamental importância o seguinte teorema:

Teorema de Noether *A cada grupo de transformações contínuas que deixam invariante o lagrangeano, corresponde uma lei de conservação e reciprocamente.*

Em vez de apresentar uma demonstração geral deste importante teorema, vamos, nas secções seguintes estudar separadamente os casos de simetrias internas e de simetrias do espaço-tempo.

1.3 Simetrias internas

Para trabalharmos com a generalidade necessária para todos os casos que vamos estudar, consideremos um conjunto de n campos Φ_i ($i = 1, \dots, n$) que designaremos por um vector coluna

²O grupo de Poincaré engloba as transformações de Lorentz e as translações no espaço-tempo a 4 dimensões. Tem portanto 10 *geradores* e as partículas físicas são representações irredutíveis desse grupo etiquetadas pelos dois invariantes de Casimir do grupo, relacionados com a massa e o spin da partícula.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Um grupo G de m transformações infinitesimais actua em Φ da forma seguinte³

$$\delta\Phi = i\varepsilon^a \Omega^a \Phi \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, m. \quad (1.21)$$

onde Ω^a são um conjunto de m matrizes hermíticas $n \times n$, ou seja mais explicitamente

$$\delta\Phi_i = i\varepsilon^a \Omega_{ij}^a \Phi_j \quad (1.22)$$

e os índices repetidos são sempre somados. Os parametros ε^a são constantes, isto é, $\partial_\mu \varepsilon^a = 0$. As matrizes Ω^a formam uma representação do grupo, isto é,

$$[\Omega^a, \Omega^b] = if^{abc} \Omega^c \quad (1.23)$$

Se o lagrangeano $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ é deixado invariante pelas transformações 1.21, então

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial_\mu(\delta\Phi) \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right] \delta\Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Usando as equações do movimento 1.5 obtemos

$$0 = i\varepsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi \right) \quad (1.25)$$

Portanto se definirmos as correntes⁴

$$J^{a\mu} \equiv -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \Omega^a \Phi \quad (1.26)$$

elas são conservadas, isto é

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0 \quad (1.27)$$

Notar que há m correntes conservadas J_μ^a ; $a = 1, 2, \dots, m$. Notar ainda que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}$ tem a estrutura dum vector linha, pois J_μ^a é um escalar no espaço do grupo.

A existência de correntes conservadas implica a existência de *cargas* conservadas. Para vermos isto definimos

³O factor i em 1.21 é convencional. Vai afectar a forma de 1.23.

⁴O sinal em 1.26 é uma convenção.

$$Q^a \equiv \int d^3x J_0^a(\vec{x}, t) \quad (1.28)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{dQ^a}{dt} &= \int d^3x \partial^0 J_0^a(\vec{x}, t) \\ &= \int d^3x \left[\partial^\mu J_\mu^a(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^a \right] \\ &= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^a \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde se usou a conservação da corrente 1.27 e a última igualdade resulta do teorema da divergência estendido a todo o espaço.

Se quantificarmos a teoria usando quantificação canónica⁵, as cargas tornam-se operadores que obedecem às seguintes relações de comutação (tempos iguais)

$$[Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q^c \quad (1.30)$$

isto é, as cargas são uma representação do grupo de transformações. O número de cargas independentes é igual ao número de geradores do grupo. Vamos ver alguns exemplos simples de aplicação destas ideias.

Exemplo 1.4 Campo escalar carregado

O grupo de transformações tem só um parâmetro. Aplicando 1.26 ao lagrangiano do campo escalar carregado 1.11, obtemos

$$\begin{aligned} J_\mu &= -i\phi\partial_\mu\phi^* + i\phi^*\partial_\mu\phi \\ &\equiv i\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi \end{aligned} \quad (1.31)$$

e a carga (eléctrica ou outra dependendo do problema em questão) é então dada por

$$Q = i \int d^3x \left[\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi \right] \quad (1.32)$$

⁵Neste curso não iremos falar da quantificação das teorias mas somente do conteúdo da teoria clássica. Para um estudo da quantificação em teorias abelianas (QED) ver [1–5]. Para o estudo da quantificação das teorias de gauge não abelianas ver [4, 5].

A carga Q é conservada (constante) e o grupo de transformações é o grupo abeliano $U(1)$. As transformações finitas correspondentes a 1.18 são

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (1.33)$$

Exemplo 1.5 *Campo spinorial carregado.*

Novamente o grupo é $U(1)$. A partir do lagrangeano 1.13 obtemos para a corrente

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.34)$$

que é exactamente a definição usual de corrente eléctrica (ver por exemplo [1]). A carga conservada é então dada por 1.28 ou seja

$$Q = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (1.35)$$

que é exactamente a definição usual de carga eléctrica (ver [1]) em unidades da carga do electrão.

Exemplo 1.6 *Spin isotópico.*

Para descrever o protão e o neutrão é por vezes uma boa ideia considerá-los como dois estados dum spinor a duas componentes que descreve assim uma entidade designada por nucleão. Este método será útil para teorias em que exista alguma relação entre os dois estados, como é o caso das interacções fortes. Assim o lagrangeano será dado por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (1.36)$$

onde se consideram os dois nucleões com a mesma massa. Isto dentro da ideia de que a diferença de massa entre o protão e o neutrão não deve ser de origem forte, mas sim electromagnética. O estado Ψ é um dubleto

$$\Psi = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Consideremos então as transformações

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \Psi \quad ; \quad a = 1, 2, 3. \quad (1.38)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli que obedecem à seguinte álgebra

$$\left[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right] = i\varepsilon^{abc} \frac{\tau^c}{2} \quad (1.39)$$

O lagrangeano 1.36 é invariante para as transformações 1.38 como pode ser facilmente verificado. As correntes são

$$J_\mu^a = \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi \quad (1.40)$$

Há três cargas conservadas

$$Q^a = \int d^3x \Psi^\dagger \frac{\tau^a}{2} \Psi \quad (1.41)$$

que obedecem à álgebra de $SU(2)$, isto é

$$[Q^a, Q^b] = i\varepsilon^{abc} Q^c \quad (1.42)$$

Neste caso o grupo de transformações que deixa invariante o lagrangeano é não abeliano.

1.4 Simetrias do espaço-tempo

Vamos considerar separadamente os dois casos importantes, as translações e as transformações de Lorentz.

i) Translações

Consideremos uma translação infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (1.43)$$

Então

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \varepsilon^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (1.44)$$

e \mathcal{L}' conduz às mesmas equações de movimento que \mathcal{L} , porque diferem apenas por uma 4-divergência. Se \mathcal{L} for invariante para translações então a equação 1.44 diz-nos que não pode ter dependência explícita nas coordenadas x^μ . Então

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \delta(\partial_\mu\varphi_r) \right] \\
&= \partial_\mu \left[\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \varepsilon^\nu \partial_\nu\varphi_r \right]
\end{aligned} \tag{1.45}$$

onde usámos as equações do movimento, isto é a equação 1.5. Igualando 1.44 e 1.45 e usando o facto de que ε^μ é arbitrário obtemos

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.46}$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o *tensor energia-momento* e é definido por

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \partial^\nu\varphi_r \tag{1.47}$$

Usando estas relações podemos definir as quantidades conservadas

$$P^\mu \equiv \int d^3x T^{0\mu} \tag{1.48}$$

e

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0 \tag{1.49}$$

Notando que $T^{00} = \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é o hamiltoniano, é fácil de ver que P^μ é o 4-vector momento. Assim a invariância para translações conduz à conservação do 4-momento, resultado conhecido da física elementar.

ii) Transformações de Lorentz

Sejam as transformações de Lorentz infinitesimais

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.50}$$

Como vimos, para o caso da equação de Dirac, a transformação 1.50 é acompanhada por uma transformação dos campos

$$\varphi'_r(x') = S_{rs}(\omega) \varphi_s(x) \tag{1.51}$$

Para o caso de campos escalares $S_{rs} = \delta_{rs}$ e para spinores vimos que

$$S_{rs} = \delta_{rs} + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{rs} \omega^{\mu\nu} \tag{1.52}$$

Em geral a variação de φ_r provém de dois efeitos. Temos

$$\begin{aligned}\delta\varphi_r(x) &= S_{rs}^{-1}(\omega)\varepsilon_s(x') - \varphi_r(x) \\ &= -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} [(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\delta_{rs} + \Sigma_{rs}^{\alpha\beta}] \varphi_s\end{aligned}\quad (1.53)$$

onde definimos

$$S_{rs}(\omega) \equiv \delta_{rs} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma_{rs}^{\alpha\beta} . \quad (1.54)$$

Então

$$\delta\mathcal{L} = -\omega^{\alpha\beta}x_\alpha\partial_\beta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta\varphi_r \right] \quad (1.55)$$

o que dá

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0 \quad (1.56)$$

com

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\Sigma_{rs}^{\alpha\beta}\varphi_s \quad (1.57)$$

O momento angular conservado é

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = \int d^3x [x^\alpha T^{0\beta} - x^\beta T^{0\alpha} + \pi_r \Sigma_{rs}^{\alpha\beta}\varphi_s] \quad (1.58)$$

com

$$\frac{dM^{\alpha\beta}}{dt} = 0 \quad (1.59)$$

Em 1.58 introduzimos o momento conjugado π_r [1], de acordo com a definição

$$\pi_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi}_r)} \quad (1.60)$$

Problemas Capítulo 1

1.1 A densidade hamiltoniana (ou mais simplesmente, com um pequeno abuso de linguagem, o hamiltoniano), é dada por

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \quad (1.61)$$

onde o momento conjugado π_r é dado por 1.60. Calcule \mathcal{H} para o campo escalar complexo descrito por 1.11.

1.2 Considere o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (1.62)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.63)$$

a) Mostre que as equações de Euler-Lagrange dão

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (1.64)$$

b) Compare as equações anteriores com as equações de Maxwell.

c) Defina o tensor *dual*

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (1.65)$$

Mostre que $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$. Interprete estas equações.

1.3 Considere a teoria de Maxwell livre, isto é, $J^\mu = 0$.

a) Calcule o tensor de energia momento $T^{\alpha\beta}$ para o campo electromagnético. Intreprete as suas componentes, T^{00} , T^{0i} e T^{ik} .

b) Mostre que $T^{\alpha\beta}$ não é invariante de gauge, não é simétrico e não tem traço nulo, isto é $T^\alpha_\alpha \neq 0$.

c) Mostre que se pode escrever

$$T^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta} + \partial_\mu(F^{\mu\alpha}A^\beta) \equiv \theta^{\alpha\beta} + T_D^{\alpha\beta} \quad (1.66)$$

onde $\theta^{\alpha\beta}$ é simétrico, invariante de gauge e tem traço nulo.

d) Mostre que $T_D^{\alpha\beta}$ satisfaz

$$\partial_\alpha T_D^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \int d^3x T_D^{0\beta} = 0 \quad (1.67)$$

e) Verifique que então

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.68)$$

e

$$P^\alpha = \int d^3x T^{0\alpha} = \int d^3x \theta^{0\alpha} \quad (1.69)$$

isto é, pode-se usar $\theta^{\alpha\beta}$ em vez de $T^{\alpha\beta}$ para descrever o 4-momento e $\theta^{\alpha\beta}$ é conservado.

f) Escreva as componentes θ^{00} , θ^{0i} e θ^{ik} em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} .

Capítulo 2

Invariância de Gauge

Aqui seguimos as secções 10.1 a 10.2 do Griffiths [6] e o capítulo 2 do meu texto FIE [7].

2.1 lagrangeanos em Mecânica Clássica

Em mecânica clássica a equação fundamental é a lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.1)$$

Se um sistema for conservativo então a força pode ser obtida duma função potencial, $U(\vec{r})$, através da relação 5

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (2.2)$$

e portanto as equações do movimento escrevem-se

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U . \quad (2.3)$$

A mesma dinâmica pode ser obtida num formalismo alternativo, designado por formalismo lagrangeano. Aí começa-se por definir o lagrangeano (ou função de Lagrange) através da relação

$$L = T - U \quad (2.4)$$

onde T é a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.5)$$

As equações da dinâmica resultam de exigir que a ação definida como o integral do lagrangeano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L \quad (2.6)$$

seja estacionária ($\delta S = 0$) para a trajetória da partícula. Este requisito conduz às chamadas equações de Euler-Lagrange, que se escrevem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

para um sistema com n coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ e onde se definiu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} . \quad (2.8)$$

Aplicando a um problema a três dimensões obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\nabla_i U \quad (2.10)$$

e a Eq. (2.7) conduz à mesma Eq. (2.3).

A este nível parece uma complicação desnecessária. No entanto, os lagrangeanos são muito úteis por duas razões. Primeiro porque alguns problemas são mesmo mais fáceis de resolver usando este formalismo (por exemplo pêndulos acoplados), e em segundo lugar porque as simetrias conduzem naturalmente a leis de conservação. Por exemplo, se L não depender das coordenadas, a Eq. (2.7) imediatamente nos diz que o momento linear é conservado.

2.2 lagrangeanos em Teoria de Campo

Os lagrangeanos em teoria de campo relativista têm uma importância fundamental. Isto deve-se fundamentalmente à importância que as simetrias têm na descrição das interações fundamentais da Natureza e essas simetrias são implementadas duma maneira muito mais simples nos lagrangeanos. Em mecânica clássica as variáveis dependem do tempo, $x_i(t)$, enquanto que em teoria de campo lidamos com campos que dependem do ponto do espaço tempo $x^\mu = (t, \vec{x})$, por exemplo para um campo escalar, $\phi(x)$.

Não vamos aqui fazer uma dedução da passagem de sistemas com um número finito de graus de liberdade para a situação em teoria do campo onde temos infinitos graus de liberdade. Vamos só dar o resultado sobre a forma de dicionário, conforme indicado na Tabela 2.1. É fácil de verificar que para o campo real de Klein-Gordon a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.11)$$

reproduz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (2.12)$$

Sistemas Finitos graus liberdade	Teoria do Campo
t	x^μ
q	$\phi(x)$
\dot{q}	$\partial_\mu \phi(x)$
$S = \int dt L(q, \dot{q})$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

Tabela 2.1: Dicionário para lagrangeanos em teoria de campo.

Para o campo de Dirac temos que tratar o spinor e o seu adjunto como graus de liberdade independentes (tal como acontece no campo escalar complexo, ver problema 2.4). Assim é fácil de ver que a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

conduz à equação de Dirac. De facto As equações de Euler-Lagrange são, para o caso do campo de Dirac,

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (2.13)$$

Do lagrangeano, Eq. (2.13), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad (2.14)$$

e portanto

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.15)$$

como queríamos mostrar. A densidade Lagrangeana de Dirac tem uma propriedade notável. É invariante para as transformações

$$\psi'(x) = e^{ie\alpha} \psi(x) \quad ; \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi} e^{-ie\alpha} \quad (2.16)$$

com α constante. Isto corresponde a redefinir a fase da função de onda, que certamente é arbitrária. Veremos na secção seguinte as implicações que esta observação terá.

Antes de terminar consideremos mais dois exemplos, o caso dum campo de spin 1 com massa e o caso do fóton, spin 1 sem massa.

Exemplo 2.1 Considere o lagrangeano de Proca para uma partícula de spin 1 com massa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (2.17)$$

Onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.18)$$

Vamos deduzir as equações de Euler-Lagrange. Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu \quad (2.20)$$

e portanto as equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (2.21)$$

que foi a equação de movimento que usámos no capítulo anterior quando discutimos o bóson vetorial intermédio.

Exemplo 2.2 Considere o lagrangeano de Maxwell com interação com uma corrente exterior,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (2.22)$$

Obtemos facilmente as equações de Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu . \quad (2.23)$$

2.3 Invariância de Gauge. O eletromagnetismo

Nas transformações consideradas na secção anterior o parâmetro α era constante. A invariância *global* queria então dizer que a escolha das fases era arbitrária e que se escolhêssemos as fases doutra maneira ao mesmo tempo em todos os pontos do espaço-tempo a teoria seria idêntica.

Posta a questão nestes termos, a pergunta que surge naturalmente é saber se há teorias em que a escolha das convenções das fases pode ser feita localmente, isto é, diferente para cada ponto do espaço-tempo. Em princípio, estas teorias se puderem ser formuladas, deverão ser mais relevantes para a Física pois parece-nos lógico que dois experimentadores em laboratórios diferentes possam fazer escolhas diferentes das convenções e obter os mesmos resultados físicos. Queremos portanto teorias em que o lagrangeano seja invariante debaixo de transformações de simetria interna mas que dependem do ponto do espaço tempo.

Estas teorias existem e são as denominadas teorias com *invariância padrão* ou *teorias de gauge* na designação inglesa. Usaremos esta última designação por ser a mais corrente entre os físicos. Pedir que uma teoria possua invariância local é uma condição muito restritiva. De facto se tivermos uma teoria que tenha uma dada invariância global, normalmente não será possível torná-la localmente invariante sem

adicionar mais qualquer coisa. Essa qualquer coisa é o conceito de força traduzido em teoria quântica dos campos por um campo que é trocado entre as partículas que interagem. Consideremos como exemplo o caso do campo de Dirac. O lagrangeano é dado na Eq. (2.13),

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (2.24)$$

Esta teoria é invariante quando efetuamos transformações de fase constantes como na Eq. (2.16) Vamos ver o que se passa quando as transformações são locais, isto é, a escolha de fase é independente em cada ponto do espaço-tempo, e para simplificar vamos considerar transformações infinitesimais¹,

$$\delta\psi = i\alpha(x)\psi \quad ; \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha(x)\bar{\psi} \quad (2.25)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -i\alpha(x)\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + i\alpha(x)\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto o lagrangeano deixa de ser invariante. É fácil de ver que o problema está ligado ao facto de $\partial_\mu\psi$ não se transformar como ψ . Assim introduzimos o conceito de *derivada covariante* D_μ tal que numa transformação de gauge, Eq. (2.25), se transforme como os campos, isto é

$$\delta(D_\mu\psi) = i\alpha(x)D_\mu\psi \quad (2.27)$$

Definimos a derivada covariante pela relação

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.28)$$

e vamos ver que transformações deve ter o campo vetorial A_μ para satisfazer a Eq. (2.30). Obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \delta(ieA_\mu)\psi + D_\mu(\delta\psi) \\ &= ie\delta A_\mu\psi + \partial_\mu(i\alpha(x)\psi) + ieA_\mu(i\alpha(x)\psi) \\ &= i\alpha(x)D_\mu\psi + ie\delta A_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)\psi \end{aligned} \quad (2.29)$$

Agora comparando a Eq. (2.29) com a Eq. (2.27), obtemos a lei de transformação do campo vetorial A_μ , dada por

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu\alpha(x) \quad (2.30)$$

Esta lei de transformação é exatamente uma transformação de gauge do eletromagnetismo se A_μ for interpretado como o campo do fóton. Assim vemos que o

¹Para transformações contínuas (grupos de Lie) o que se passa para transformações infinitesimais também é verdade para transformações finitas. Ver problema 2.1

campo vetorial A_μ representa a força de que tínhamos falado anteriormente que assegura que podemos escolher a fase de maneira diferente em diferentes pontos do espaço tempo. A introdução do campo A_μ força a introdução de novos termos no lagrangeano, em particular os termos de energia cinética² para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo A_μ que é invariante para a Eq. (2.30) é o tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.31)$$

De facto usando 2.30 em 2.31 obtemos trivialmente

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

Por outro lado termos de massa da forma $A^\mu A_\mu$ não são invariantes exigindo que o fóton não tenha massa. Portanto o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (2.33)$$

$$\equiv \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interacção}} \quad (2.34)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (2.35)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{interacção}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \quad (2.36)$$

é invariante para as transformações de fase locais, Eqs. (2.25) e (2.30). Diz-se que é uma teoria com invariância de gauge. O lagrangeano 2.34 descreve a interação dos eletrões com os fótons. É chamada eletrodinâmica quântica (QED). Para aplicação posterior recordemos aqui os passos que nos levaram até ela.

i) Tínhamos uma teoria que era invariante para transformações globais. Neste caso o grupo de transformações era abeliano, multiplicação por uma fase, $U(1)$.

ia) O requisito que a invariância se mantivesse quando as transformações fossem locais levou-nos à introdução dum novo campo, o fóton A_μ , com transformações univocamente dadas por essa condição. Fisicamente é o fóton que assegura que as diversas escolhas de fase são consistentes.

III) Foi necessário introduzir um novo termo no lagrangeano para nos dar a propagação dos fótons livres. Este termo deve possuir invariância de gauge.

²Isto é os termos quadráticos nos campos.

2.4 Teorias de Yang-Mills

Os mesmos passos que nos levaram a QED podem ser dados quando o grupo de transformações das fases é não abeliano. Neste caso dizemos que temos uma teoria não abeliana com invariância de gauge ou teoria de *Yang-Mills* [8], embora este nome se devesse só aplicar ao caso em que o grupo é $SU(2)$. Como alguns conceitos têm que ser generalizados vamos ver os passos em detalhe.

Começemos pelo lagrangeano para campos fermiônicos generalizando QED. Seja

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (2.37)$$

onde Ψ é um vetor coluna

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

num espaço vetorial de dimensão n , onde atua uma representação do grupo não abeliano G

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a(x)\Omega^a\Psi, \quad a = 1, 2, \dots, m \quad (2.39)$$

Ω^a são m matrizes hermiticas $n \times n$ que obedecem às relações de comutação de G ,

$$[\Omega^a, \Omega^b] = if^{abc}\Omega^c \quad (2.40)$$

sendo f^{abc} as constantes de estrutura de G . Desta relação resulta que m é a dimensão da representação adjunta de G , pois esse é também o número de geradores do grupo que obedecem a uma relação semelhante à Eq. (2.40).

O lagrangeano 2.37 não é invariante sob a ação das transformações 2.39. Para o tornar invariante introduzimos a derivada covariante, generalizando a Eq. (2.28),

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu^a\Omega^a)\Psi \quad (2.41)$$

onde A_μ^a são m campos vetoriais, que vão desempenhar um papel análogo ao do fóton no eletromagnetismo, e que são designados por *campos de gauge*. As matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação de Ψ de dimensão n . A lei de transformação de A_μ^a é obtida pelo requisito de que $D_\mu\Psi$ se transforme como Ψ . Para a calcular introduzimos a notação compacta

$$\underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon^a\Omega^a \quad (2.42)$$

$$\underline{A}_\mu \equiv A_\mu^a\Omega^a \quad (2.43)$$

onde $\underline{\varepsilon}$ e \underline{A}_μ são matrizes $n \times n$ e funções de (\vec{x}, t) . Então 2.39 escreve-se simplesmente

$$\delta\Psi = i \underline{\varepsilon} \Psi \quad (2.44)$$

Calculemos então a variação de $D_\mu \Psi$. Obtemos

$$\delta(D_\mu \Psi) = \partial_\mu(\delta\Psi) + ig(\delta\underline{A}_\mu) \Psi \quad (2.45)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \underline{\varepsilon} \Psi) - g \underline{A}_\mu \underline{\varepsilon} \Psi + ig(\delta\underline{A}_\mu) \Psi \quad (2.46)$$

Nós queremos que

$$\delta(D_\mu \Psi) = i \underline{\varepsilon} D_\mu \Psi \quad (2.47)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi - g \underline{\varepsilon} \underline{A}_\mu \Psi \quad (2.48)$$

Comparando as Eqs. (2.46) e (2.48) obtemos

$$\delta\underline{A}_\mu = i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \quad (2.49)$$

que é a transformação dos campos de gauge escrita numa forma matricial. Em termos das componentes A_μ a equação 2.49 escreve-se

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (2.50)$$

Notar que no caso do grupo ser abeliano tanto a Eq. (2.49) como a Eq. (2.50) se reduzem à expressão válida numa teoria abeliana como QED, Eq. (2.30) (nesse caso $m = 1$).

A derivada covariante, Eq. (2.41) tem algumas propriedades importantes para o seguimento e que vamos aqui indicar.

i) A derivada covariante pode ser escrita na forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g A_\mu^a \frac{\delta \Phi}{\delta \varepsilon^a} \quad (2.51)$$

para um campo arbitrário Φ , fermiônico ou bosônico. Esta expressão permite-nos escrever a derivada covariante de qualquer campo, ou funções de campos, desde que se saibamos as suas propriedades de transformação.

ii) A derivada dum produto pode ser facilmente calculada a partir de

$$\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi \quad (2.52)$$

Então a Eq. (2.51) implica

$$D_\mu(\phi\psi) = (D_\mu\phi) \psi + \phi D_\mu\psi \quad (2.53)$$

iii) O comutador de duas derivadas covariantes pode ser facilmente calculado. De facto não é zero, nem mesmo para um grupo abeliano. Obtemos

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi = (\partial_\mu + ig \underline{A}_\mu)(\partial_\nu + ig \underline{A}_\nu) \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (2.54)$$

$$= ig (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]) \Psi \quad (2.55)$$

Portanto

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = ig \underline{F}_{\mu\nu} \Psi \quad (2.56)$$

onde $\underline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a$ Ω^a é definido por

$$\underline{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu] \quad (2.57)$$

Vemos assim que $\underline{F}_{\mu\nu}$ é a generalização para o caso não abeliano do tensor de Maxwell. Podemos verificar que se transforma numa forma covariante (não é invariante) para as transformações dos campos de gauge, Eq. (2.49),

$$\begin{aligned} \delta(\underline{F}_{\mu\nu}) &= \partial_\mu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - \frac{1}{g} \partial_\nu \underline{\varepsilon} \right) - \partial_\nu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \right) \\ &\quad - g [[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu], \underline{A}_\nu] - i [\partial_\mu \underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - g [\underline{A}_\mu, [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu]] - i [\underline{A}_\mu, \partial_\nu \underline{\varepsilon}] \\ &= i [\underline{\varepsilon}, \underline{F}_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (2.58)$$

Contrariamente ao caso abeliano, $\underline{F}_{\mu\nu}$ não é invariante. De facto transforma-se como um vetor num espaço de dimensão m (a dimensão do grupo), isto é

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -f^{bca} \varepsilon^b F_{\mu\nu}^c \quad (2.59)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{bca} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.60)$$

A lei de transformação, Eq. (2.59), permite mostrar que a generalização do lagrangeano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.61)$$

é invariante para as transformações de gauge 2.49. Juntando todas as peças, concluímos que a generalização do lagrangeano 2.37 que possui invariância de gauge local é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} . \quad (2.62)$$

Antes de acabarmos esta secção vamos fazer alguns comentários sobre o que acabámos de ver e as suas aplicações. Primeiro que tudo o lagrangeano na Eq. (2.62) descreve a teoria física para uma das interações fundamentais da Natureza, quando o grupo G é $SU(3)$. É a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as

interações fortes. Nessa teoria os campos de matéria são os *quarks* que se encontram na representação fundamental do grupo (tripletos de SU(3)) e os campos de gauge são os *gluões* que se encontram na representação adjunta de SU(3) que é aquela que tem a mesma dimensão que o grupo (8 para SU(3)). Outra observação tem que ver com a massa para os campos de gauge. Um termo de massa para os campos de gauge teria a forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu} \quad (2.63)$$

e é fácil de ver que as transformações na Eq. (2.50) não deixam o lagrangeano na Eq. (2.63) invariante. Assim o fóton e os gluões aparecem naturalmente como partículas sem massa. Contudo para as interações fracas este facto levanta problemas pois nós sabemos que devido ao seu curto alcance, os portadores da força fraca devem ter massa. Este problema que persistiu na física de partículas durante várias décadas só foi resolvido com a quebra espontânea da simetria e o mecanismo de Higgs que veremos no capítulo seguinte. Finalmente um comentário sobre o caso do grupo G não ser *simples*, por exemplo

$$G = \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \quad (2.64)$$

Neste caso a generalização da Eq. (2.62) obtém-se do modo seguinte. Para os campos de matéria o lagrangeano tem a mesma forma mas a derivada covariante, Eq. (2.41) é agora uma soma sobre todos os campos de gauge com uma constante de acoplamento por cada grupo fator. O lagrangeano para os campos de gauge é simplesmente a soma de lagrangeanos do tipo da Eq. (2.61) para cada grupo fator.

Para dar um exemplo concreto vamos considerar o grupo $G = \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ que como veremos mais à frente vai ser precisamente o caso do modelo standard das interações eletrofracas. Neste caso o lagrangeano será,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - m) \Psi_f - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.65)$$

onde a soma é sobre todos os fermiões da teoria. Os campos de gauge introduzidos são convencionalmente designados por W_μ^a para SU(2) e B_μ para U(1), com os tensores do campo dados por

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{bca} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.66)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.67)$$

A derivada covariante tem agora uma contribuição de cada campo de gauge com uma constante de acoplamento diferente. Assim temos,

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + ig' Y B_\mu) \Psi \quad (2.68)$$

onde $\Omega^a = \frac{\sigma^a}{2}$ para SU(2) e Y , designada por hipercarga, uma matriz proporcional à matriz identidade para o grupo U(1). Voltaremos a este assunto no capítulo 5.

2.5 Regras de Feynman para a teoria de gauge

Consideremos uma teoria de gauge simples descrita pelo lagrangeano da Eq. (2.62). Vamos aqui enunciar as regras de Feynman para essa teoria sem demonstração. O objetivo é comparar com QED para ver as semelhanças e diferenças. De facto essas regras só são suficientes para calcular em ordem mais baixa de teoria de perturbações, mas a quantização das teorias de gauge não abelianas está muito para além deste curso elementar (ver o meu texto *Advanced Quantum Field Theory* [5]).

2.5.1 Propagadores

Começemos pelos propagadores. Aqui não há nada de novo, para além do facto que agora temos m campos de gauge. A estrutura dos termos quadráticos é a mesma que a teoria de Dirac e de Maxwell e portanto obtemos³,

$$\mu, a \text{ wavy line } \nu, b \quad -i\delta_{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad (2.69)$$

$$\text{fermion line } p \quad \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2} \quad (2.70)$$

2.5.2 Vértices

Os vértices vêm dos termos com três ou mais campos no lagrangeano. Da Eq. (2.62) obtemos

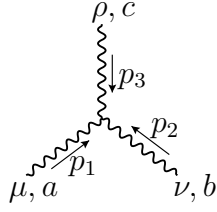
$$\mathcal{L}_{int} = g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} - g \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j \Omega_{ij}^a A_\mu^a \quad (2.71)$$

o que conduz a interações com três e quatro campos de gauge, que não existiam em QED, para além da generalização da interação entre fermiões e campos de gauge. As regras de Feynman estão descritas nas figuras seguintes.

Notar que para grupos abelianos as constantes de estrutura, $f^{abc} = 0$, e as interações triplas e quárticas desaparecem, mantendo-se somente a interações entre os fermiões e o campo de gauge, como em QED.

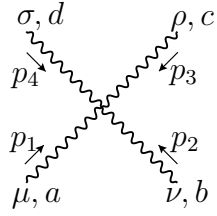
³Tecnicamente na gauge de Feynman. Para mais detalhes sobre a escolha de gauges ver a Ref. [5].

Interações triplas de campos de gauge



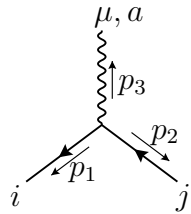
$$-gf^{abc} [g^{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2 - p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3 - p_1)^\nu] \quad (2.72)$$

Interações quárticas de campos de gauge



$$-ig^2 \left[f_{eab}f_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f_{eac}f_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + f_{ead}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \right] \quad (2.73)$$

Interações de fermiões com campos de gauge



$$-i g \gamma^\mu \Omega_{ij}^a \quad (2.74)$$

Problemas Capítulo 2

2.1 Mostre que o lagrangeano de QED, Eq. (2.34), é invariante para transformações finitas,

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.75)$$

2.2 Mostre que o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.76)$$

é invariante para as transformações

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (2.77)$$

2.3 Para o grupo das rotações num espaço a n dimensões, $O(n)$, os $\frac{1}{2} n(n-1)$ geradores independentes são dados por

$$(L_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad ; \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \quad (2.78)$$

com $L_{ij} = -L_{ji}$. Considere agora o caso de $O(3)$.

a) Identifique

$$J_1 = L_{23} \quad ; \quad J_2 = L_{31} \quad ; \quad J_3 = L_{12} \quad (2.79)$$

Mostre que os J_i têm as seguintes relações de comutação

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikm} J_m \quad (2.80)$$

b) Um vetor de E_3 transforma-se como

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V \quad (2.81)$$

Para uma transformação infinitesimal encontre a lei de transformação

$$\delta V_i = \dots \quad (2.82)$$

c) Verifique que esta lei para uma rotação em torno do eixo dos zz dá o resultado conhecido

$$\begin{aligned}\delta V_1 &= \theta V_2 \\ \delta V_2 &= -\theta V_1 \\ \delta V_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.83}$$

d) Mostre que para transformações infinitesimais se tem

$$\delta(V_i V_i) = 0\tag{2.84}$$

e) Considere agora transformações finitas

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V\tag{2.85}$$

Mostre que

$$V'^T V' = V^T V\tag{2.86}$$

2.4 Considere o lagrangeano seguinte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

- a) Verifique que as equações de movimento são as equações de Klein-Gordon.
b) Verifique que o lagrangeano é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha} \phi \quad ; \quad \alpha = \text{constante}$$

c) Mostre que se a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

é invariante para uma transformação

$$\phi'_i = \phi_i - i\varepsilon \lambda_{ij} \phi_j$$

onde ε é infinitesimal e λ_{ij} são constantes, então existe uma corrente conservada, isto é

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

onde

$$J^\mu = -i\lambda_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \phi_j$$

Este resultado é conhecido pelo nome de *teorema de Noether* .

d) Aplique este resultado ao lagrangeano dado.

e) Mostre que se $\alpha = \alpha(x)$ o lagrangeano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)^* \phi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi$$

é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha(x)} \phi$$

se A_μ se transformar de forma apropriada. Qual? Comente.

Capítulo 3

Quebra Espontânea de Simetria: Mecanismo de Higgs

Aqui seguimos as secções 10.7 a 10.9 do Griffiths [6] e o capítulo 3 do meu texto FIE [7].

3.1 Introdução

Vamos agora considerar o problema da quebra de simetria. A maior parte das simetrias observadas na Natureza não são exatas. Por exemplo, o *Isospin* não é uma simetria exata da Natureza pois o próton e o neutrão não tem a mesma massa. Uma maneira de estudar em teoria quântica dos campos teorias com quebra de simetria é introduzir no lagrangeano termos com coeficientes *pequenos* que explicitamente realizem a quebra. Nós aqui vamos estar interessados noutro tipo de quebra de simetria, dita espontânea, em que o lagrangeano é simétrico sob a ação dum grupo de transformações mas o estado base (de menor energia) não é.

Para vermos aquilo em que estamos interessados vamos começar pelo exemplo mais simples, uma teoria com um campo escalar complexo com auto-interação e invariante para o grupo U(1). O lagrangeano mais geral invariante de Lorentz e renormalizável¹ é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)\end{aligned}\tag{3.1}$$

O lagrangeano na Eq. (3.1) descreve um campo escalar complexo ou dois campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. Normalmente, o

¹Em termos muito simples pode dizer-se que uma teoria é renormalizável se nenhum dos termos que constituem o lagrangeano tiver dimensão, em termos de massa, superior a quatro. Para esta contagem uma derivada conta como uma massa, um campo escalar também como uma massa e um campo fermiônico com dimensão de $\frac{3}{2}$ em termos de massa. Para mais detalhes ver as Refs. [1, 5].

espectro de massa vê-se analisando os termos bilineares da teoria. Mas isto contém o pressuposto que o estado base (energia mínima) corresponde à configuração em que os campos são nulos. Para campos escalares, pode suceder que o estado de energia mínima corresponda a uma configuração em que

$$\phi = v = \text{constante} \neq 0 \quad (3.2)$$

Neste caso as partículas são associadas com oscilações de ϕ em torno do valor do mínimo, v . Se escrevermos

$$\phi(x) = v + \chi(x) \quad (3.3)$$

as massas devem ser lidas da parte de lagrangeano bilinear em χ . Vejamos para a teoria descrita na Eq. (3.1) quais são os estados de energia mínima. A densidade hamiltoniana é (ver problema 3.1),

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\vec{\partial}\phi^*) \cdot (\vec{\partial}\phi) + V \quad (3.4)$$

Como os dois primeiros termos são definidos positivos e a energia deve ser limitada por baixo, o parâmetro λ na Eq. (3.1) deve ser positivo. O sinal do parâmetro μ^2 é deixado arbitrário. O mínimo da energia corresponde a um valor constante para ϕ que minimize o potencial V . Este é dado por

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.5)$$

e as equações de minimização são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \phi(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \phi^*(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Temos portanto duas possibilidades:

a) $\mu^2 > 0$

Neste caso o mínimo é para $\phi = 0$. Temos a situação descrita na Fig. 3.1. A teoria descreve um isodoubleto escalar complexo de massa $m = \sqrt{\mu^2}$.

b) $\mu^2 < 0$

Neste caso o potencial tem a forma da Fig. 3.2, e o mínimo corresponde ao valor

$$\phi^* \phi = |\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (3.7)$$

Consideremos o caso *b*). Uma maneira possível de vermos o espectro de massa da teoria seria introduzir a condição de mínimo na Eq. (3.3) e depois fazer a substituição no lagrangeano da Eq. (3.1). Contudo esta não é a forma mais fácil de proceder

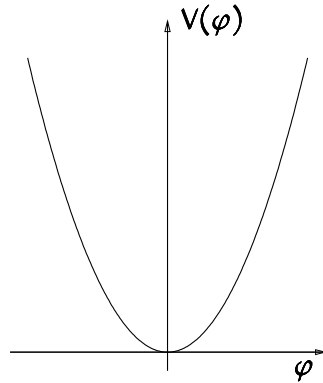


Figura 3.1: Potencial clássico para $\mu^2 > 0$.

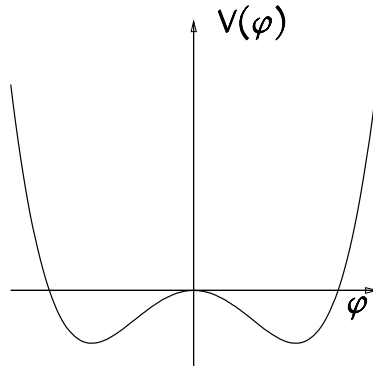


Figura 3.2: Potencial clássico para $\mu^2 < 0$.

neste caso. Como a condição do mínimo é que $|\phi| = v$, é mais conveniente fazer a seguinte redefinição do campo complexo ϕ :

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.8)$$

com ξ e σ campos escalares reais. Esta parametrização corresponde a escrever o campo complexo na forma

$$\phi = e^{i \arg(\phi)} |\phi| \quad (3.9)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= \frac{i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \\ \partial^\mu \phi^* &= \frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \end{aligned} \quad (3.10)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \left(\sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left(v^2 + \sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \lambda \left(v^4 + 2\sqrt{2}v^3\sigma + 3\sqrt{2}v^2\sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma^3 + \frac{\sigma^4}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando a condição do mínimo podemos escrever, conservando somente até aos termos quadráticos,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{constante} \\
 &\quad + \text{termos de ordem superior}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

O lagrangeano da Eq. (3.12) descreve portanto dois campos escalares reais, ξ e σ , um com massa $m_\sigma = \sqrt{-2} \mu^2$ e outro com massa zero, $m_\xi = 0$. Este facto pode ser interpretado facilmente. Em primeiro lugar, notemos que o potencial V é no plano complexo do campo ϕ um potencial tipo *fundo de garrafa de champanhe*. Com a parametrização da Eq. (3.8) o campo σ refere-se às oscilações radiais e ξ às oscilações angulares. Ora enquanto que o potencial tem curvatura na direcção radial, na direcção angular o potencial é plano. Não custa energia rodar ao longo do *vale* no fundo da garrafa. Assim as excitações radiais têm massa e as angulares não. O aparecimento de partículas sem massa é uma característica geral destes fenómenos de quebra espontânea de simetria e é designado por teorema de Goldstone. Na secção seguinte faremos uma demonstração geral do teorema. Contudo antes de acabarmos esta secção vamos dar outros exemplos simples.

O segundo exemplo que vamos considerar é de facto o mesmo exemplo noutra linguagem. Se escrevermos o campo ϕ em termos das partes real e imaginária

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho + i\pi) \tag{3.13}$$

obtemos para o lagrangeano na Eq. (3.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\rho^2 + \pi^2) \tag{3.14}$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\rho^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\rho^2 + \pi^2)^2 \tag{3.15}$$

Este lagrangeano continua a ter uma invariância. De facto é invariante para o grupo das rotações no plano, $O(2)$. Este grupo tem a mesma álgebra que $U(1)$. É o grupo abeliano das rotações em torno dum eixo de simetria. As transformações podem escrever-se

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Para analisarmos a quebra de simetria temos de ver onde ocorre o mínimo. As equações são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= 0 = \rho [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} &= 0 = \pi [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Novamente podemos ter as duas situações das Figs. 3.1 e 3.2. No caso em que $\mu^2 < 0$, o mínimo absoluto ocorre na circunferência

$$\sqrt{\rho^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad (3.18)$$

Para vermos o espectro tomemos os eixos no plano $\rho - \pi$ de tal forma que

$$\langle \rho \rangle_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad ; \quad \langle \pi \rangle_0 = 0 \quad (3.19)$$

Então definimos

$$r = \rho - \langle \rho \rangle_0 \quad (3.20)$$

e escrevemos o lagrangeano na Eq. (3.12) em termos de r e π . Obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu r \partial^\mu r + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \mu^2 r^2 - \lambda \langle \rho \rangle_0 r (r^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (r^2 + \pi^2)^2 \quad (3.21)$$

Obtivemos novamente um campo sem massa, π , enquanto que o campo r tem massa $m_r = \sqrt{-2\mu^2}$. Para vermos que não há perda de generalidade na escolha da Eq. (3.19) ver o problema 3.1.

Finalmente, como último exemplo, consideremos uma teoria novamente com um campo escalar complexo com auto-interação mas em que a interação é invariante para transformações de isospin descrito pelo grupo $SU(2)$, e o campo encontra-se na representação dubleto desse grupo. O lagrangeano mais geral, invariante de Lorentz, invariante para o transformações do grupo e renormalizável é então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

O lagrangeano da Eq. (3.22) descreve portanto 4 campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. O estado base vai corresponder ao mínimo do potencial. Estamos interessados na situação em que há quebra espontânea de simetria, isto é o vácuo (estado base) não tem a mesma simetria que o lagrangeano. Isto acontece quando ocorre a situação da Fig. 3.2. Neste caso o potencial é minimizado, para $\mu^2 < 0$, quando

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (3.24)$$

Podemos sempre escolher um referencial de isospin onde o estado de energia mínima se possa escrever

$$\phi_{\min} = \text{constante} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

O campo $\phi(x)$ pode portanto escrever-se

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \chi(x) \quad (3.26)$$

Para parametrizar convenientemente as pequenas oscilações $\chi(x)$, notemos que em cada ponto x podemos sempre escolher um referencial de isospin onde $\phi(x)$ tenha a forma

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Este referencial será ligado ao referencial definido pela Eq. (3.25) através duma transformação de SU(2), diferente para cada x ,

$$U(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \quad (3.28)$$

Podemos portanto escrever nesse referencial²

$$\phi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

²Comparar a forma da Eq. (3.29) com a da Eq. (3.8). A explicação da Eq. (3.8) pode ser feita exatamente da mesma forma, só que agora o grupo seria U(1) e não SU(2).

e

$$\chi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Para pequenas oscilações temos

$$\chi(x) \simeq \begin{bmatrix} v(\theta^2 + i\theta^1) \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - iv\theta^3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As pequenas oscilações em torno do estado base são parametrizadas por quatro campos escalares reais, θ^a e σ . O espectro de massa é lido dos termos bilineares nesses campos. Substituindo a Eq. (3.29) no lagrangeano da Eq. (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + v^2 \partial_\mu \theta^a \partial^\mu \theta^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\theta}^a \partial^\mu \hat{\theta}^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$m_\sigma = \sqrt{-2 \mu^2} \quad (3.33)$$

e redefinimos os campos θ^a para que o termo cinético tenha a normalização canônica.

$$\hat{\theta}^a \equiv \sqrt{2} v \theta^a \quad (3.34)$$

Temos portanto três partículas de massa zero e uma com massa $\sqrt{-2 \mu^2}$. O aparecimento de partículas de massa zero, designadas por *bosões de Nambu-Goldstone*, é uma consequência do teorema de Goldstone que veremos na secção seguinte.

3.2 O Teorema de Goldstone

Começemos então pelo enunciado do teorema.

Teorema 3.1 *Seja uma teoria invariante sob a ação dum grupo de transformações G , com n geradores. Se houver uma quebra espontânea da simetria, de tal forma que o vácuo (estado base) seja invariante somente sob a ação de G' com m geradores ($G' \subset G$), então aparecerão partículas de spin zero sem massa em número igual ao dos geradores de G que não deixam o vácuo invariante, isto é, há $n-m$ bosões de Nambu-Goldstone.*

Vemos portanto que o teorema não só nos diz que há partículas sem massa mas também nos diz o seu número. Nos dois primeiros exemplos anteriores tínhamos os grupos $U(1)$ e $O(2)$ com 1 gerador, e o vácuo ficou sem simetria alguma e portanto o número de bosões de Nambu-Goldstone era igual ao número de geradores daqueles grupos, isto é um gerador. O terceiro exemplo requer um pouco mais de atenção. Isto porque embora tivéssemos só falado do grupo $SU(2)$, de facto a simetria do lagrangeano na Eq. (3.22) é maior do que $SU(2)$ pois também é invariante para transformações de fase das duas componentes do dubleto ao mesmo tempo, isto é

$$\phi' = e^{i\epsilon} \phi \quad (3.35)$$

Este grupo é o grupo $U(1)$, e é claro que as suas transformações comutam com as de $SU(2)$. Isto quer dizer que a invariância total do lagrangeano é $SU(2) \times U(1)$. O número de geradores é então $3+1 = 4$, o que quer dizer, de acordo com o teorema de Goldstone, que o vácuo, Eq. (3.25), ainda deve ser invariante para algum subgrupo abeliano de $SU(2) \times U(1)$. Isto é de facto verdade pois a combinação

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (3.36)$$

deixa invariante o vácuo 3.25. De facto

$$Q\phi_{min} = \frac{1 + \tau_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

e portanto

$$e^{i\epsilon Q} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Este modelo será a base do modelo standard das interações eletrofracas, e o gerador que não é quebrado será interpretado como a *carga eléctrica*.

É conveniente, antes de apresentarmos a demonstração geral do teorema, vermos outro caso em que nem toda a simetria é quebrada. Seja uma teoria com um tripleto de campos escalares ϕ^i com $i = 1, 2, 3$. Com estes campos podemos construir um lagrangeano invariante para rotações no espaço de simetria interna, isto é invariante para $O(3)$. O lagrangeano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4} \lambda (\phi^i \phi^i)^2 \quad (3.39)$$

Com a experiência adquirida até aqui é fácil de ver que se $\mu^2 < 0$ o potencial tem um mínimo se

$$\phi^i \phi^i = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.40)$$

Esta condição não define a direção da quebra de simetria. Escolhemos um referencial no qual é a componente 3 que desenvolve um valor de expectação no vácuo (vev). Isto quer que podemos escrever

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

O grupo de simetria original $O(3)$ tem $\frac{1}{2} \times 3 \times (3 - 1) = 3$ geradores. O facto novo que aparece neste exemplo é que o vácuo ainda tem um grupo de simetria não trivial. Este é o subgrupo de $O(3)$ que não mistura a componente 3 com as outras. É claro que é $O(2)$ com $\frac{1}{2} \times 2 \times (2 - 1) = 1$ gerador. De acordo com o teorema de Goldstone devemos ter $3 - 1 = 2$ bosões de Nambu-Goldstone. Vamos ver como isso ocorre. Para isso convém recordar um pouco de teoria de grupos (ver problema 2.3). Sejam $L_{ij} = -L_{ji}$ os 3 geradores de $O(3)$ e l_{ij} os do subgrupo $O(2)$, isto é $l_{ij} = L_{ij}$ para $i, j \neq 3$ (é de facto só um gerador, l_{12}). Sejam $k_i = L_{i3}, i = 1, 2$ os restantes geradores de $O(3)$. Em geral podemos escrever

$$(L_{ij})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.42)$$

e portanto os geradores k_i são

$$(k_i)_{kl} = (L_{i3})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{3l} - \delta_{il} \delta_{3k}) \quad (3.43)$$

Então k_i atuando no vetor coluna $v_i = v \delta_{i3}$ dá

$$(k_i v)_j = v (k_i)_{j3} = v (k_i)_{33} = -i v \delta_{ij} \quad (3.44)$$

Então se definirmos σ e $\xi_i, i = 1, 2$ por

$$\phi = e^{i \xi_i(x) k_i / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

vemos que a ordem mais baixa é equivalente a subtrair o valor

$$\begin{aligned} \phi &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + i \xi_i(x) k_i / v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Em termos destes campos o lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \sigma)^4$$

$$+ \text{termos de ordem superior} \quad (3.47)$$

Observamos novamente que o campo σ tem massa $-2\mu^2$ e que há dois campos ξ_1 e ξ_2 , com massa nula. Isto é precisamente o que diz o teorema de Goldstone. Este exemplo generaliza-se facilmente ao caso do grupo $O(n)$. Então o número de bosões de Nambu-Goldstone é, para o caso duma quebra de simetria do grupo $O(n)$ para o seu subgrupo $O(n-1)$

$$\begin{aligned} \# \text{Bosões de Goldstone} &= \# \text{Geradores de } O(n) - \# \text{Geradores de } O(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times (n-1) - \frac{1}{2} \times (n-1) \times (n-2) \\ &= n-1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

o que se reduz ao resultado anterior para o caso de $O(3)$.

Voltemos então ao teorema de Goldstone [9,10] para efetuar a sua demonstração.

Dem.

Começemos por escrever o lagrangeano em termos de n campos escalares reais ϕ_i , que formam um vetor com n componentes,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Isto é sempre possível, pois uma representação complexa pode sempre ser tornada real à custa de duplicar a dimensão do espaço vetorial. Então o lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (3.50)$$

onde $V(\phi)$ é um polinómio em ϕ que é invariante sob a ação de algum grupo G . Este tem n geradores Ω^a e os campos ϕ transformam-se de acordo com

$$\delta\phi = i\epsilon^a \Omega^a \phi \quad (3.51)$$

Como a representação é real então, $i\Omega^a$ deve ser uma matriz real, e Ω^a uma matriz imaginária pura. Como os Ω^a são matrizes hermíticas, então também devem ser antissimétricas (comparar com o exemplo de $O(3)$), pois

$$\Omega^a = (\Omega^a)^\dagger = (\Omega^{a*})^T = -\Omega^{aT} \quad (3.52)$$

V é invariante sob a ação de G e portanto devemos ter

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = i \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \epsilon^a \Omega_{ij}^a \phi_j \quad (3.53)$$

Como os parâmetros ϵ^a são arbitrários, obtemos n equações

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Omega_{ij}^a \phi_j = 0 \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (3.54)$$

Diferenciemos agora a equação anterior. Obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Omega_{ij}^a \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Omega_{ik}^a = 0 \quad (3.55)$$

Agora calculemos a Eq. (3.55) no valor $\phi = v$ que minimiza V , isto é

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=v} = 0 \quad (3.56)$$

O resultado é então

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi=v} \Omega_{ij}^a v_j = 0 \quad (3.57)$$

Por outro lado se expandirmos V em redor do mínimo devemos ter

$$V = \frac{1}{2} M_{ij}^2 (\phi - v)_i (\phi - v)_j + \text{termos de ordem superior} \quad (3.58)$$

Daqui se conclui que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=v} = M_{ij}^2 \quad (3.59)$$

onde M_{ij}^2 é a matriz de massa (quadrada). Então

$$M_{ij}^2 \Omega_{jk}^a v_k = 0 \quad (3.60)$$

Seja agora G' o subgrupo de dimensão m de G que permanece como uma simetria do vácuo. O que isto quer dizer é que se Ω^a for um gerador de G' então

$$\Omega^a v = 0 \quad (3.61)$$

e a Eq. (3.60) não contém qualquer informação sobre a massa. Pelo contrário, para cada um dos $(n-m)$ vetores $\Omega^a v$ que não são zero, então a Eq. (3.60) diz-nos que M^2 tem um valor próprio zero. Se estes vetores $\Omega^a v$ não nulos formarem a base dum espaço vetorial de dimensão $(n-m)$, mostrámos que há $(n-m)$ bósons de Goldstone na teoria. Demonstremos então este último ponto. Para isso definimos

$$A^{ab} \equiv (\Omega^a v, \Omega^b v) = (v, \Omega^a \Omega^b v) \quad (3.62)$$

onde a última igualdade resulta de Ω^a ser hermitico. Então

$$A^{ab} - A^{ba} = (v, [\Omega^a, \Omega^b] v) = i f^{abc} (v, \Omega^c v) = 0 \quad (3.63)$$

e a última igualdade resulta do facto das matrizes Ω^a serem antissimétricas. Seja agora \tilde{A} a matriz $(n-m) \times (n-m)$ obtida de A por restrição dos valores de a e b para os quais $\Omega^a v \neq 0$. Então \tilde{A} é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada. Seja O a matriz $(n-m) \times (n-m)$ que diagonaliza \tilde{A} , isto é

$$\tilde{A}^{tab} = (O\tilde{A}O^T)^{ab} = (O^{ac}\Omega^c v, O^{bd}\Omega^d v) \quad (3.64)$$

Mas $O^{ac}\Omega^c v \neq 0$, e os elementos diagonais de \tilde{A}' são todos positivos e o espaço gerado por $O^{ab}\Omega^b$ e portanto por Ω^b tem dimensão $(n-m)$. Então os Ω^a que não aniquilam o vácuo são independentes, o que completa a demonstração de que M^2 tem $(n-m)$ valores próprios nulos.

3.3 O mecanismo de Higgs

Chegados aqui, podemos perguntar porque é que estivemos a estudar em tanto detalhe teorias com quebra espontânea de simetria, pois á primeira vista o problema de necessitarmos de partículas com massa para descrever as interações fracas não parece ser resolvido com estas teorias, pois a quebra de simetria dá origem a novas partículas sem massa e os bosões de gauge dessas teorias não podem ter termos de massa no lagrangeano, pois não são invariantes de gauge. A razão é que se tivermos uma teoria com invariância de gauge local e o fenómeno de quebra espontânea de simetria, então os bosões de Nambu-Goldstone não aparecem e é possível dar massa aos bosões vetoriais dessa teoria. Este fenómeno é conhecido pelo nome de mecanismo de Higgs, que passamos a explicar.

Não vamos apresentar uma demonstração geral mas sim dar dois exemplos. Vamos começar pelo caso do campo escalar carregado com invariância de gauge local

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.65)$$

onde a derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (3.66)$$

Por construção o lagrangeano é invariante para as transformações de gauge locais

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\epsilon(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Se $\mu^2 > 0$, a Eq. (3.65) é simplesmente o lagrangeano da eletrodinâmica escalar [1]. Se $\mu^2 < 0$ devemos ter o mecanismo de quebra espontânea de simetria e temos que analisar o espectro com mais cuidado. Em particular temos que encontrar o vácuo da teoria (estado base). Este será dado pelos valores $\langle \phi \rangle$ e $\langle A_\mu \rangle$ que minimizem a energia. A invariância de Lorentz do vácuo requer que

$$\langle A_\mu \rangle = 0 \quad (3.68)$$

mas o campo escalar ϕ deverá ter um valor não nulo

$$\langle \phi \rangle = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} > 0 \quad (3.69)$$

Em vez de fazermos a mudança de variável $\phi(x) \rightarrow v + \chi(x)$, vamos parametrizar ϕ exponencialmente, isto é

$$\phi(x) = e^{i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.70)$$

Como vimos o campo $\xi(x)$ está associado com a quebra espontânea da simetria. Na ausência do campo de gauge A_μ , concluímos que ξ não tinha massa. Vamos ver agora que isso não é verdade para uma teoria de gauge. Substituindo a Eq. (3.70) na Eq. (3.65), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & + \sqrt{2} v e A_\mu \partial^\mu \xi + \mu^2 \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Da equação anterior resulta que o campo σ tem massa $-2\mu^2$, mas os campos A_μ e ξ estão misturados ao nível dos termos quadráticos. Assim a leitura do espectro não é imediata. A maneira mais fácil de resolver esta situação é aproveitar a invariância de gauge local do lagrangeano da Eq. (3.65). Se escolhermos para parâmetro da transformação de gauge

$$\epsilon(x) = -\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v} \quad (3.72)$$

então

$$\begin{aligned} \phi(x) & \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \phi(x) = v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) & \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \end{aligned} \quad (3.73)$$

Como o lagrangeano é invariante para estas transformações devemos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, A_\mu) & = \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) \\ & = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu - ieA'_\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \left[(\partial^\mu + ieA'^\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \mu^2 (\sqrt{2}v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\sqrt{2}v + \sigma)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (3.75)$$

Agora o novo lagrangeano na Eq. (3.74) pode ser expandido facilmente. Obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \sigma (2\sqrt{2}v + \sigma) \\ & - \frac{1}{2} \sigma^2 (6\lambda v^2 + \mu^2) - \sqrt{2}\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Nesta gauge não há, para os termos quadráticos, mistura entre os diferentes campos e portanto o espectro pode ser lido diretamente,

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \sqrt{6\lambda v^2 + \mu^2} = \sqrt{-2\mu^2} \\ m_A &= \sqrt{2}ev \end{aligned} \quad (3.77)$$

e o campo ξ desapareceu completamente da teoria. Esta gauge, onde o espectro pode ser lido facilmente, é designada por *gauge unitária*³. Para onde foi o campo ξ ? Para percebermos a resposta, façamos primeiro uma contagem de graus de liberdade. No lagrangeano original, Eq. (3.65), temos dois campos escalares reais e um campo vetorial *sem massa*, portanto outros dois graus de liberdade. No total temos quatro graus de liberdade. No lagrangeano redefinido, Eq. (3.76), temos só um campo escalar real, correspondendo a um grau de liberdade, mas temos um campo vetorial *com massa*, correspondendo a três graus de liberdade. A soma é de novo quatro. Portanto a interpretação é que o grau de liberdade associado ao ξ corresponde à polarização longitudinal do campo vetorial. Vemos assim, que contrariamente ao que diz o teorema de Goldstone, não só não há bósons de Nambu-Goldstone, mas além disso campos vetoriais podem adquirir massa no processo. Este fenómeno designa-se por *mecanismo de Higgs*. Com a atribuição do prémio Nobel de 2013 a comunidade passou a chamar *mecanismo de Brout-Englert-Higgs* embora na verdade tenha sido descoberto independentemente por várias pessoas [12–14].

O exemplo anterior é bastante simples e mostra o essencial do mecanismo de Higgs mas é demasiado simples para ser útil na física de partículas. Isto porque o campo A_μ não pode ser interpretado como o fóton, pois sabemos que este não tem massa⁴. Para considerarmos um modelo mais realista, (de facto a base do modelo standard das interações eletrofracas), consideremos a teoria de gauge construída sobre o modelo invariante para $SU(2) \times U(1)$ dada pelo lagrangeano da Eq. (3.22). A versão com invariância de gauge local escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (3.78)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.79)$$

³Pode-se mostrar [11] que a gauge unitária, onde é fácil de ler o espectro, existe sempre.

⁴Este exemplo é útil em supercondutividade onde o efeito de Meissner pode ser interpretado como o fóton adquirindo uma massa. Na verdade as ideias que deram origem ao mecanismo vieram da física da matéria condensada.

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a SU(2) e a U(1), respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (3.80)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (3.81)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (3.82)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli e o fator $\frac{1}{2}$ no terceiro termo da Eq. (3.82) foi introduzido por conveniência (podemos sempre redefinir a constante g'). Note-se que como o grupo é um produto de 2 fatores, há uma constante de acoplamento para cada grupo fator, g e g' . O passo seguinte na análise deste modelo é encontrar o estado base ou vácuo. Devido aos requisitos de invariância de Lorentz só o campo escalar pode ter um valor constante diferente de zero e minimizar a energia. Esta será a situação quando $\mu^2 < 0$.

Vejamos então qual o espectro de massa neste caso. Escolhemos os eixos de isospin tais que

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

onde como anteriormente

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3.84)$$

Com a experiência do exemplo anterior podemos escolher uma gauge, designada por *gauge unitária*, onde

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Então substituindo a Eq. (3.85) na Eq. (3.78), e conservando só os termos bilineares, obtemos para os diferentes termos,

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi^\dagger) (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma \right) \left[\frac{1}{4} g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \right] \\ &\quad + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma \right) \left[\frac{1}{4} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW^{3\mu} - g'B^\mu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{4} (gv)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{4} v^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW^{3\mu} - g'B^\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{termos de ordem superior} \\
 V(\phi^* \phi) & = \text{constante} + \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \\
 -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} & = \partial_\mu W_\mu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \text{termos de ordem superior} \\
 -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} & = \partial_\mu B_\mu - \partial_\nu B_\mu
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Veamos então o espectro da teoria. Na parte dos campos escalares obtemos, como anteriormente, só um campo escalar real com massa

$$m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.87}$$

Como a Eq. (3.86) tem produtos cruzados de W_μ^3 e B_μ , para determinar o espectro de massa dos bósons de gauge temos que diagonalizar a matriz de massa

$$M^2 = \frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

Os valores próprios de M^2 são 0 e $\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)$. Se designarmos o vetor próprio de massa nula por A_μ e outro por Z_μ , podemos escrever

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{3.89}$$

O ângulo θ_W é determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula, isto é

$$\frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{bmatrix} = 0 \tag{3.90}$$

donde resulta

$$g^2 \sin \theta_W - gg' \cos \theta_W = 0 \tag{3.91}$$

ou seja

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \tag{3.92}$$

A parte livre (quadrática nos campos) do lagrangeano escreve-se então

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{livre}} & = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\
 & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\
& -\frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\
& -\frac{1}{4} \tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

onde definimos as partes quadráticas dos tensores dos campos de gauge,

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^{1,2} = \partial_\mu W_\nu^{1,2} - \partial_\nu W_\mu^{1,2}, \quad \tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad \tilde{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.94}$$

Vemos portanto que na presença de campos de gauge, o fenómeno da quebra espontânea de simetria não conduz a campos escalares sem massa. O espectro de massa é o seguinte. Um campo escalar, σ , com massa $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ como antes. Dois campos vectoriais com massa $M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2}$, um campo vectorial com massa $M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)}$ e um campo vectorial sem massa. Vemos assim, que 3 dos campos de gauge adquiriram massa devido ao fenómeno de quebra espontânea de simetria. Este fenómeno é designado por mecanismo de Higgs. Repare-se que a contagem do número de graus de liberdade está certa, pois um campo vectorial massivo tem 3 polarizações enquanto que se não tiver massa tem só duas. Assim se explica o *desaparecimento* dos três escalares da teoria. Em linguagem pictórica, diz-se que foram *comidos* pelos campos de gauge que então ficaram com massas. Este mecanismo tornou possível aplicar as teorias com invariância de gauge às interações fracas pois passou a ser possível dar massa aos portadores da força fraca. Note-se ainda que um dos campos de gauge não adquiriu massa tornando-se portanto um candidato para ser o fóton. Isto deve-se ao facto da simetria não ter sido toda quebrada, há ainda uma simetria residual U(1), isto é

$$\text{SU}(2) \times \text{U}(1) \rightarrow \text{U}(1) \tag{3.95}$$

que, como veremos no capítulo dedicado ao modelo standard, corresponderá ao eletromagnetismo. O outro facto fundamental sobre o mecanismo de Higgs, é que uma teoria com invariância de gauge local, com quebra espontânea de simetria é renormalizável, enquanto que uma teoria de campos vectoriais com massa o não é. O modelo que temos vindo a descrever corresponde de facto ao modelo de Glashow-Weinberg-Salam para as interações fracas e eletromagnéticas, que descreveremos em maior detalhe no capítulo 5.

Problemas Capítulo 3

3.1 Considere o lagrangeano dedinido pela Eq. (3.14) com quebra espontânea de simetria, isto é, $\mu^2 < 0$. Então escolha o vácuo

$$\langle \rho \rangle = v \cos \theta \quad ; \quad \langle \pi \rangle = v \sin \theta \quad (3.96)$$

Faça a redefinição

$$\begin{aligned} \rho &= v \cos \theta + \rho' \\ \pi &= v \sin \theta + \pi' \end{aligned} \quad (3.97)$$

e analize o espectro da teoria.

3.2 Reproduza os passos que levaram à Eq. (3.86).

3.3 Verifique que obtém os termos quadráticos nos campos indicados na Eq. (3.93).

Capítulo 4

As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.4 do livro do Bettini [15] e as secções 4.1 e 4.5 do meu livro FIE [7].

4.1 A Teoria de Fermi

A teoria das interações fracas começou com a teoria de Fermi para o decaimento β .

$$n \rightarrow p + e + \nu \quad (4.1)$$

Na altura eram conhecidos o protão, o neutrão, o eletrão e o neutrino que foi precisamente introduzido para que a conservação da energia fosse satisfeita. Para explicar o decaimento 4.1 Fermi introduziu o seguinte lagrangeano

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (4.2)$$

que corresponde ao diagrama de Feynman da Figura 4.1. Com este lagrangeano

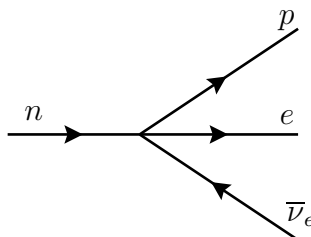


Figura 4.1: Decaimento β do neutrão

pode-se calcular a largura do decaimento. Obtemos para a amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1)\gamma^\alpha u(p) \bar{u}(k)\gamma_\alpha v(q_2) \quad (4.3)$$

De facto não podemos descrever os nucleões por ondas planas, mas temos que usar funções de onda nucleares. Isto resulta nalguma complicação em que não vamos aqui entrar [16]. Com algumas aproximações obtemos para o espectro de energia do eletrão emitido

$$N(E) = \frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \quad (4.4)$$

onde E é a energia do eletrão e

$$\Delta = m_n - m_p \quad (4.5)$$

Para a largura total vem então

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} \int_{m_e}^{\Delta} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \\ &= 6.9 \times 10^{-4} G_\beta^2 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Conhecendo o tempo de vida média do neutrão obtinha-se um valor para G_β

$$G_\beta \simeq 1.1 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (4.7)$$

Notar que o valor de G_β é ajustado para se obter o valor de Γ . O sucesso da teoria estava em prever um espectro $N(E)$ em acordo com o que era na altura medido.

4.2 A teoria V-A

4.2.1 Introdução

Depois do sucesso da teoria de Fermi, procurou-se estender o método a outros decaimentos radioativos. Para isso foi importante notar que o lagrangeano 4.2 se pode escrever na forma

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J_p^\alpha J_{e\alpha} + \text{h.c.} \quad (4.8)$$

onde J_e^α e J_p^α são as *correntes* definidas por

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu, \quad J_p^\alpha = \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \quad (4.9)$$

Estas correntes são semelhantes à corrente eletromagnética em QED. O lagrangeano assim construído é portanto um escalar de Lorentz. Mas em 1936 Gamow e Teller [17]

mostraram que a Eq. (4.2) não é única e que o lagrangeano escalar mais geral deveria ser uma mistura da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & c_1 \bar{\psi}_p \psi_n \bar{\psi}_e \psi_\nu & S \times S \\
& + c_2 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu & V \times V \\
& + c_3 \bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n \bar{\psi}_e \sigma_{\alpha\beta} \psi_\nu & T \times T \\
& + c_4 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu & A \times A \\
& + c_5 \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu & P \times P
\end{aligned}$$

e os coeficientes da combinação linear só podem ser determinados pela experiência. Na Eq. (4.10) estão indicadas as propriedades de transformação para transformações de Lorentz dos diferentes termos. Gamow e Teller mostraram que no limite não relativista se obtém

$$SS, VV \rightarrow \Delta J = 0 \quad (4.10)$$

$$AA, TT \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1 \quad (4.11)$$

Portanto, enquanto que a descrição de Fermi ($V \times V$) poderia explicar transições com $\Delta J = 0$, alguma parte de $A \times A$ ou $T \times T$ deverá estar presente para explicar as transições com $|\Delta J| = 1$. Um grande trabalho experimental foi então empreendido para determinar os coeficientes c_i .

4.2.2 Violação de paridade nas interações fracas

Todo o trabalho anterior foi feito tendo como hipótese de base que a Paridade era conservada nas interações fracas, tal como o é no eletromagnetismo. Contudo, em 1956 Lee e Yang [18] mostraram que esta ideia devia ser abandonada para explicar o chamado $\tau - \theta$ puzzle. Este consistia em compreender porque é que os dois decaimentos

$$\begin{aligned}
\theta & : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \\
\tau & : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-
\end{aligned} \quad (4.12)$$

podiam ocorrer simultaneamente quando as paridades dos dois estados finais eram diferentes, isto é

$$P(\pi^+ \pi^0) = +1 \quad ; \quad P(\pi^+ \pi^+ \pi^-) = -1 \quad (4.13)$$

Isto poderia acontecer se a Paridade não fosse conservada nas interações fracas. Eles propuseram então um conjunto de experiências para testar esta ideia, e nos dois anos seguintes foi mostrado que de facto assim é, em particular na experiência de Wu *et al.*, [19]. Assim a construção de Gamow e Teller tem que ser modificada para incluir, por exemplo, termos da forma $V \times A$,

$$\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu \quad (4.14)$$

Era preciso recomeçar do início e comparar com a experiência de novo.

4.2.3 Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica

Nesta busca experimental que levou à descoberta da violação da Paridade nas interações fracas uma descoberta importante que foi feita diz respeito aos neutrinos, nomeadamente que eles têm helicidade negativa. Como o projetor da helicidade negativa é

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (4.15)$$

isto quer dizer que

$$\psi_\nu = P_L \psi_\nu \quad (4.16)$$

Como consequência disto a corrente leptónica para o eletrão deverá ser

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} \quad (4.17)$$

o que também foi confirmado experimentalmente. Convém aqui notar que para uma partícula qualquer com massa, como o eletrão, se pode sempre escrever

$$\psi_e = P_L \psi_e + P_R \psi_e \quad (4.18)$$

Então a estrutura da corrente leptónica mostra que só a componente esquerda do eletrão participa na interação. De facto

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L \psi_\nu &= \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L^2 \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \\ &= \psi_e^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \overline{(P_L \psi_e)} \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se tivermos uma interação geral da forma $V - A$

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi \quad (4.20)$$

e se introduzirmos

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (4.21)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R \end{aligned} \quad (4.22)$$

pois os termos cruzados são nulos. Mostremos isso para um deles. Obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R &= \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_L P_R \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde se usaram as propriedades de ortogonalidade dos projetores P_L e P_R . Isto quer dizer que uma corrente vetorial ou vetorial axial conserva a helicidade. Por outras palavras quer também dizer que pode ser construída para partículas que tenham só uma helicidade, como é o caso dos neutrinos. O mesmo não se passa para o termo de massa. O termo de massa usual de Dirac é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{massa}} &= -m\bar{\psi}\psi \\ &= -m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) \\ &= -m\bar{\psi}_L\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_L\end{aligned}\quad (4.24)$$

pois

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L\psi_L &= \overline{(P_L\psi)} P_L\psi = \psi^\dagger P_L\gamma^0 P_L\psi = \psi^\dagger\gamma^0 P_R P_L\psi \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.25)$$

e de igual modo para $\bar{\psi}_R\psi_R$. Como conclusão, o neutrino não poderá ter um termo de massa do tipo acima indicado¹.

4.2.4 A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann

Fazendo a síntese de todo o trabalho iniciado com a teoria de Fermi, em 1958 Feynman e Gell-Mann [20] propuseram que as interações fracas deveriam ser descritas pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger}\quad (4.26)$$

onde

$$J^\mu = \ell^\mu + h^\mu\quad (4.27)$$

sendo ℓ^μ e h^μ as partes leptónica e hadrónica dessa corrente. Os resultados experimentais mostraram que a estrutura da corrente leptónica deveria ser do tipo $V - A$, isto é

$$\ell^\alpha = \bar{\psi}_e\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_\tau}\quad (4.28)$$

Quando a teoria foi proposta não existia o τ . Mas experimentalmente foi verificado que a estrutura para o τ era a mesma e que a intensidade relativa das três partes da corrente era igual. Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. A constante G_F que aparece em 4.26 é de facto ligeiramente diferente de G_β da teoria de Fermi. O seu valor podia ser determinado calculando o decaimento do muão descrito pelo diagrama da Figura 4.2 e que não tem as complicações da física hadrónica referidas a propósito do decaimento do neutrão.

¹De facto há a possibilidade de ter termos de massa do tipo de Majorana, que não serão discutidos aqui.

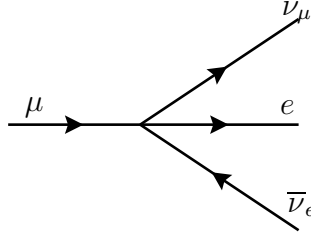


Figura 4.2: Decaimento do múon.

A amplitude que resulta de 4.26 é

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p) \bar{u}(k)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (4.29)$$

e um cálculo simples (ver por exemplo a Ref. [1]) dá (desprezando m_e),

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (4.30)$$

donde se conclui que

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (4.31)$$

A parte hadrónica da corrente fraca, h^α , será estudada mais adiante. Vejamos aqui com um pouco mais de detalhe a corrente leptónica. Para isso notemos primeiro que podemos escrever

$$\ell^\alpha = 2\bar{\psi}_L(e)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_e) + 2\bar{\psi}_L(\mu)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\mu) + 2\bar{\psi}_L(\tau)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\tau) \quad (4.32)$$

isto é, a corrente escreve-se completamente em termos das componentes esquerdas dos campos. Definimos agora um *isospin esquerdo* para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num dubleto da forma

$$\chi_L(e) \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (4.33)$$

Então a corrente leptónica escreve-se

$$\ell^\alpha = 2 \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) + \bar{\chi}_L(\mu)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\mu) + \bar{\chi}_L(\tau)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\tau) \right] \quad (4.34)$$

onde

$$\bar{\chi}_L(e) = \left[\bar{\nu}_e, \bar{e} \right] \quad (4.35)$$

e expressões semelhantes para os outros leptões, e onde definimos

$$\tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \quad (4.36)$$

Somos assim tentados a definir uma corrente de isospin esquerdo através de

$$j_L^{i\alpha} = \frac{1}{2} [\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^i\chi_L(e) + \dots] \quad (4.37)$$

Então se introduzirmos a notação

$$j_L^{\pm\alpha} \equiv \frac{j_L^{1\alpha} \pm ij_L^{2\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (4.38)$$

vemos que

$$\ell^\alpha = 2\sqrt{2} (j_L^-)^\alpha \quad (4.39)$$

e que

$$\ell^{\alpha\dagger} = 2\sqrt{2} (j_L^+)^\alpha \quad (4.40)$$

Embora estejamos a introduzir um formalismo adaptado a $SU_L(2)$ o lagrangeano na Eq. (4.26) não é invariante para esse grupo pois falta o termo² $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$. Dito de outro modo, todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada pois $\Delta Q \neq 0$. Um termo como $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$ que faria a Eq. (4.26) invariante para transformações de $SU_L(2)$, implicaria a existência de correntes fracas neutras, o que só viria a ser descoberto mais tarde. Vemos assim que a parte leptónica do lagrangeano de Feynman e Gell-Mann sugeria já que o grupo de simetria fosse $SU_L(2)$ e a descoberta das correntes neutras veio confirmá-lo, como discutiremos no capítulo 5.

4.3 As interações fracas dos hádrões

4.3.1 Universalidade e a teoria de Cabibbo

As interações fracas dos hádrões são um pouco mais complicadas. Parte dessa complicação resulta, claro, das próprias interações fortes e da sua propriedade de *confinamento*, que quer dizer que a teoria fundamental é simples de escrever em termos dos quarks mas que estes não são partículas livres, só aparecendo na natureza como estados ligados. Assim todos os cálculos de interações com hádrões são muito difíceis. Nós apresentaremos primeiro os resultados em termos das correntes dos hádrões, mas depois traduziremos esses resultados para o lagrangeano ao nível dos quarks.

Do ponto de vista das interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrónicas. O primeiro é relevante para o decaimento β do neutrão representado na Fig. 4.1. Dizemos que este decaimento corresponde a $\Delta S = 0$, isto é não há variação

²De facto considerando só a parte do eletrão e seu neutrino obtemos

$$\mathcal{L}_{lep} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) \bar{\chi}_L(e)\gamma_\alpha\tau^+\chi_L(e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_L^{1\alpha} j_{L\alpha}^1 + j_L^{2\alpha} j_{L\alpha}^2)$$

do número quântico estranheza (é zero para todas as partículas envolvidas). Há no entanto outro tipo de decaimentos em que $\Delta S = \pm 1$, como por exemplo

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (4.41)$$

representado na Figura 4.3. A parte da corrente leptónica é igual, mas a parte

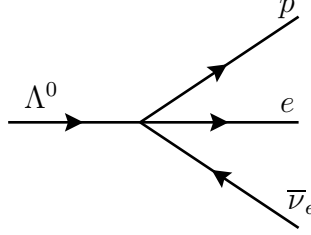


Figura 4.3: O decaimento $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$.

hadrónica tem agora $\Delta S = 1$ ($\Lambda^0 = uds$). Além disso, a parte hadrónica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão. Os resultados experimentais podem ser resumidos da forma seguinte

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \quad (4.42)$$

onde tanto a parte $\Delta S = 0$, $h_\mu^{(0)}$, como a parte $\Delta S = 1$, $h_\mu^{(1)}$, têm a forma $V - A$, isto é

$$\begin{aligned} h_\mu^{(0)} &= V_\mu^{(0)} - A_\mu^{(0)} \\ h_\mu^{(1)} &= V_\mu^{(1)} - A_\mu^{(1)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considerações de simetria relativas ao grupo $SU(3)$ para as interações fortes dos quarks u , d e s , levaram Cabibbo em 1963 [21] a propor que

$$g_V^2 + g_S^2 = 1 \quad (4.44)$$

o que foi verificado experimentalmente. Em vez de g_V e g_S , é mais normal introduzir um ângulo designado por *ângulo de Cabibbo*, tal que

$$g_V = \cos \theta_c \quad ; \quad g_S = \sin \theta_c \quad (4.45)$$

Experimentalmente verifica-se que

$$\sin \theta_c \simeq 0.22 \quad (4.46)$$

Em resumo o facto essencial é que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hadrónica. Mais concretamente se tomarmos a corrente leptónica como referência temos a situação descrita na Tabela 4.1 o que mostra que a universalidade é menos perfeita no sector hadrónico.

Corrente	Intensidade
ℓ_α	1
$h_\alpha^{(0)}$	$\cos \theta_c$
$h_\alpha^{(1)}$	$\sin \theta_c$

Tabela 4.1: Intensidade relativa das correntes fracas leptónica e hadrónica.

Estes factos permitem-nos descrever agora as correntes hadrónicas ao nível dos quarks. A corrente hadrónica tem então a forma seguinte

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d + \sin \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_s . \quad (4.47)$$

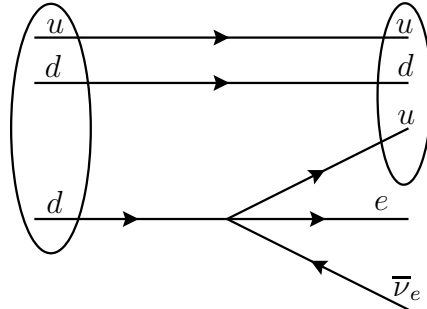
A ideia é que a interação que transforma um neutrão

$$n = (udd) \quad ; \quad Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (4.48)$$

num protão

$$p = (uud) \quad ; \quad Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad (4.49)$$

deve ser aquela que leva um quark $d \rightarrow u$ ($\Delta Q = 1$) e em termos de quarks o decaimento β seria representado nesta aproximação pela Figura 4.4 Claro que o

Figura 4.4: Decaimento $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ em termos de quarks.

confinamento torna esta descrição demasiado simplista, mas a hipótese é que a estrutura da teoria ao nível do lagrangeano em termos de quarks está correta. Não nos preocupando mais com as complicações das interações fortes, vejamos melhor a estrutura em termos dos campos dos quarks. Como o u e d diferem numa unidade de carga, as correntes $h_\alpha^{(0)}$ e $h_\alpha^{(1)}$ são correntes carregadas, tal como acontecia para a corrente leptónica. Por outro lado são também correntes esquerdas. Vejamos se é possível dar-lhes uma forma onde apareçam sinais do grupo $SU_L(2)$. Para isso observemos que

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s$$

$$= \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) \quad (4.50)$$

onde passámos a representar os campos pelo seu nome, isto é, por exemplo para o quark u , $u \equiv \psi_u$. Se olharmos para a equação anterior somos levados a introduzir um dubleto de quarks da forma

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \quad (4.51)$$

onde

$$d_c \equiv d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad (4.52)$$

Então a corrente pode ser escrita na forma

$$h^\alpha = 2 \bar{Q}_L \tau^+ Q_L \quad (4.53)$$

onde

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \quad (4.54)$$

Na Eq. (4.51) o índice L quer dizer

$$Q_L = \begin{pmatrix} P_L u \\ P_L d_c \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Mais uma vez para que o lagrangeano (4.26) tenha invariância para $SU_L(2)$ falta a componente neutra

$$h^{3\alpha} = 2\sqrt{2} \bar{Q}_L \gamma^\alpha \tau^3 Q_L \quad (4.56)$$

4.3.2 O mecanismo de GIM e a descoberta do charm

Como vimos a teoria de Cabibbo para as correntes carregadas permite escrever a corrente hadrónica carregada através de

$$h_\alpha^+ = 2 \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^+ Q_L \quad ; \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

onde o sinal + em h_α^+ quer dizer que a corrente aumenta a carga por uma unidade, isto é

$$\Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1 \quad (4.58)$$

De igual modo podemos introduzir a corrente que diminui a carga por uma unidade,

$$h_\alpha^- = 2 \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^- Q_L \quad (4.59)$$

e portanto o lagrangeano para a parte hadrónica será³

$$\mathcal{L}_{\text{had}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha h^{\alpha\dagger} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha^- h^{+\alpha}$$

³Estamos a considerar neste ponto que há só os quarks u, d, s . Mais à frente veremos como aparecem os outros.

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_\alpha^1 h^{1\alpha} + h_\alpha^2 h^{2\alpha}) \quad (4.60)$$

onde

$$h_\alpha^i = \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^i Q_L \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (4.61)$$

Tal como para o sector leptónico somos levados a pensar se não falta o termo $h_\alpha^3 h^{3\alpha}$ para ter o lagrangeano (4.60) invariante para $SU_L(2)$. Ora a corrente h_α^3 escreve-se

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L \\ &= \bar{u}_L \gamma_\alpha u_L - \bar{d}_{cL} \gamma_\alpha d_{cL} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Esta corrente tem $\Delta Q = 0$ e é portanto uma corrente neutra. A questão é então saber se existem correntes neutras na parte hadrónica das interações fracas. Experimentalmente verificou-se que sim, mas só com $\Delta S = 0$, isto é, não havia, ou eram extremamente suprimidas, as correntes neutras com mudança de estranheza. Isto põe um problema à interpretação acima pois o termo $\bar{d}_{cL} \gamma_\alpha d_{cL}$ contém partes com $\Delta S \neq 0$. De facto

$$\begin{aligned} \bar{d}_{cL} \gamma_\alpha d_{cL} &= \cos^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \sin^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L \\ &\quad + \sin \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma_\alpha s_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha d_L) \end{aligned} \quad (4.63)$$

e o último termo tem $\Delta S \neq 0$. Portanto se quisermos insistir na simetria $SU_L(2)$ com a conseqüente introdução de h_α^3 , temos que resolver este problema. Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani [22] resolveram esta questão duma forma muito elegante. Para isso postularam a existência dum segundo dubleto de $SU_L(2)$ onde apareceria um novo quark de carga $Q = 2/3$, designado por *charm* e a combinação ortogonal a d_c designada agora por s_c ,

$$s_c = -\sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad ; \quad Q = -\frac{1}{3} \quad (4.64)$$

Designemos esse dubleto por

$$Q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Então a corrente neutra completa deverá ser

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L + \bar{Q}'_L \gamma_\alpha \tau^3 Q'_L \\ &= \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L \end{aligned} \quad (4.66)$$

pois os termos cruzados na Eq. (4.63) cancelam agora exatamente. A este mecanismo dá-se o nome de *mecanismo de GIM*. Na altura em que o quark c foi proposto não

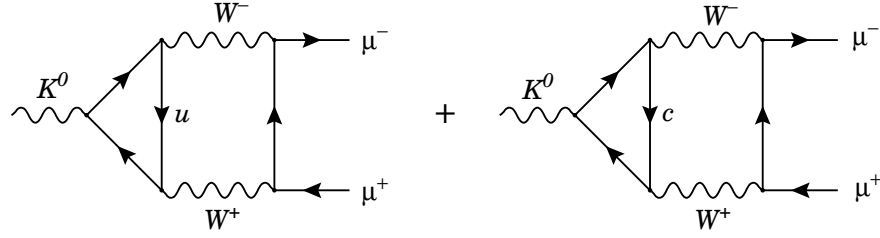


Figura 4.5: Diagramas para $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

havia ainda evidência experimental para ele. Este facto foi atribuído por GIM a ele dever ser relativamente pesado. É para crédito de GIM que eles não só propuseram o quark c como também forneceram uma estimativa para a sua massa. O argumento é o seguinte. Tomemos o decaimento

$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (4.67)$$

É um decaimento com corrente neutra e $\Delta S \neq 0$ pelo que não deveria existir de acordo com o mecanismo de GIM. Na realidade não é assim e experimentalmente verifica-se que existe, embora seja extremamente raro. De facto

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \equiv \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{tudo})} = (6.3 \pm 1.1) \times 10^{-9} \quad (4.68)$$

Como é que isto se enquadra no que dissemos acima? Muito simplesmente o mecanismo de GIM proíbe interações de corrente neutra com $\Delta S \neq 0$ somente ao nível árvore. Em ordem superior tais processos poderão existir. Assim para este processo podemos temos os dois diagramas da Fig. (4.5). Comparando os acoplamentos nos vértices o diagrama com o quark u tem uma amplitude

$$M_u \propto \sin \theta_c \cos \theta_c \quad (4.69)$$

enquanto que o diagrama com o quark c tem a amplitude

$$M_c \propto -\sin \theta_c \cos \theta_c \quad (4.70)$$

Tudo o mais é igual exceto a massa dos quarks. Se $m_u = m_c$ os dois diagramas cancelariam exatamente dando uma contribuição zero em conflito com a Eq. (4.68). Se $m_c \gg m_u$ o segundo diagrama será muito pequeno (não esquecer a massa no denominador do propagador do quark) e GIM calcularam que a contribuição do primeiro diagrama era demasiado grande para comparar com o valor observado experimentalmente. Para satisfazer o valor experimental a massa do quark c deveria estar num intervalo não muito largo. Eles encontraram

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV} \quad (4.71)$$

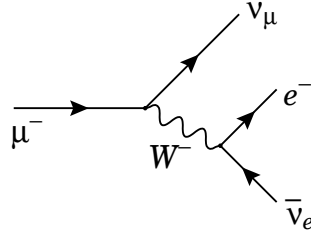


Figura 4.6: Decaimento do múon com bosão vetorial intermédio.

em comparação com o valor hoje aceite

$$m_c = 1.4 \text{ GeV} \quad (4.72)$$

Mais uma vez a via da simetria obtinha resultados importantes. Com o mecanismo de GIM é possível promover a simetria da parte hadrónica do lagrangeano fraco ao grupo $SU_L(2)$.

4.4 A hipótese do Bosão Vetorial Intermédio

Como vimos a teoria de Fermi foi motivada pela analogia com QED. Mas essa analogia é imperfeita pois não há o análogo do fóton, o portador da interação eletromagnética. Assim, desde muito cedo apareceu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas. Esse campo, designado por W , deveria ser também vetorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas. Na linguagem dos diagramas de Feynman, devíamos ter para o decaimento do múon o diagrama da Fig. (4.6) e as interações fracas seriam então mediadas pelo W da mesma maneira que as interações eletromagnéticas são mediadas pelo fóton. Ao W foi dado na altura o nome de *Bosão Vetorial Intermédio* ou IVB atendendo às iniciais em inglês. A ideia seria então que o lagrangeano na Eq. (4.26) seria substituído por um outro do tipo

$$\mathcal{L}_{weak} = g_w J_\mu W^\mu + \text{h.c.} \quad (4.73)$$

onde g_w é agora uma constante de acoplamento sem dimensões. Para tornar a teoria completa precisamos de saber o seu propagador. Para isso necessitamos da equação de onda para partículas de spin 1 com massa. Essa equação, designada por *equação de Proca* e escreve-se

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu = J^\mu \quad (4.74)$$

O propagador é então a função de Green solução da equação

$$[(\square + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_F^{\nu\rho}(x - x') = ig^{\mu\rho} \delta^4(x - x') \quad (4.75)$$

Passando para o espaço dos momentos obtemos

$$[(-k^2 + m^2)g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] G_F^{\nu\rho}(k) = ig^{\mu\rho} \quad (4.76)$$

que tem como solução (ver Problema 4.2)

$$G_F^{\nu\rho} = i \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{k^\nu k^\rho}{m^2}}{k^2 - m^2} \quad (4.77)$$

Então o elemento de matriz para o decaimento do μ^- será da forma

$$\mathcal{M} = g_w^2 J_\mu G_F^{\mu\nu} J_\nu \quad (4.78)$$

e portanto se $k^2 \ll m^2$ devemos ter

$$G_F \simeq \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (4.79)$$

Se $g \sim e$ então

$$m_W \sim e\sqrt{G_F} \sim 90 \text{ GeV} \quad (4.80)$$

o que justificaria a aproximação acima. Veremos mais à frente, no quadro do Modelo Standard, qual a relação exata entre G_F , g_w e m_W .

4.5 Problemas com a teoria corrente-corrente

4.5.1 Violação da unitariedade na interação de Fermi

Apresentámos nas secções anteriores uma teoria que descreve toda a fenomenologia conhecida das interações fracas em finais da década de sessenta. Contudo a teoria apresenta uma série de dificuldades que passamos a rever brevemente. Começemos pela interação pontual de 4 fermiões de Fermi (modificada por Feynman e Gell-Mann). Consideremos o processo

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \quad (4.81)$$

descrito neste modelo pelo diagrama da Fig. (4.7). Como os problemas que vamos exhibir ocorrem para $\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu$, vamos desprezar essas massas. Então

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \bar{u}(q_1)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (4.82)$$

o que dá

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |M|^2$$

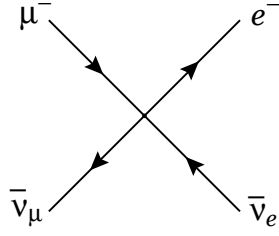


Figura 4.7: Diagrama para $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$.

$$=4G_F^2 s^2 (1 + \cos \theta)^2 \quad (4.83)$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \overline{|M|^2} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s (1 + \cos \theta)^2 \quad (4.84)$$

A secção eficaz total será então

$$\sigma = \frac{g_F^2}{3\pi} s \quad (4.85)$$

Mas por outro lado, a secção eficaz de difusão pode-se escrever na forma geral

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J+1) |f_J|^2 \quad (4.86)$$

onde k é o momento no centro de massa e f_J é a onda parcial correspondente ao momento angular J . Pode-se mostrar em geral, usando argumentos de unitariedade ou, o que é o mesmo, de conservação de probabilidade, que

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J \quad (4.87)$$

e portanto

$$|f_J| \leq 1 \quad (4.88)$$

donde se obtém

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J+1)}{k^2} = \frac{16\pi(2J+1)}{s} \quad (4.89)$$

o que mostra que σ_J decresce com s . Mas pode-se mostrar que este processo corresponde a $J = 1$ (ver problema 4.4) e para a secção eficaz não polarizada deveremos ter

$$\sigma \leq \frac{24\pi}{s} \quad (4.90)$$

o que entra em conflito com a Eq. (4.85) para

$$\sqrt{s} \geq 1.5 \times 10^3 \text{ GeV} \quad (4.91)$$

62 Capítulo 4. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

A dificuldade com a teoria pontual pode ser relacionada com o facto da constante G_F ter dimensões. De facto

$$[G_F] = M^{-2} \quad (4.92)$$

mas

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2} \quad (4.93)$$

e portanto a energias acima das massas dos leptões um argumento puramente dimensional dá

$$\sigma \sim G_F^2 s \quad (4.94)$$

dado que a secção eficaz deverá ser proporcional a G_F^2 . Isto foi exactamente o que encontrámos.

4.5.2 Violação de unitariedade no modelo IVB

O argumento anterior podia levar-nos a pensar que a dificuldade desapareceria no modelo com o bosão vetorial intermédio (IVB). Isto porque aí

$$G_F \sim \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (4.95)$$

e poderia acontecer que a muita alta energia

$$\sigma \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (4.96)$$

como acontece, por exemplo no processo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em QED. Vamos mostrar que embora o comportamento seja melhor no modelo IVB, ainda não resolve todos os problemas. Voltemos ao processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ que agora se representa na Fig. (4.8).

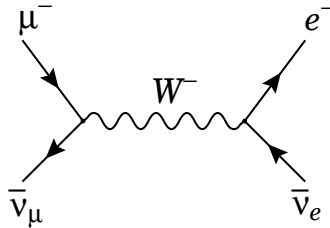


Figura 4.8:

A amplitude é agora

$$\mathcal{M} = g_w^2 \bar{\nu}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (4.97)$$

Poder-se-ia pensar que os fatores de momento no numerador do propagador do W iriam piorar o comportamento para valores elevados da energia no centro de massa. Tal não é verdade, pois uma vez utilizada a equação de Dirac, esses termos vão ser proporcionais à massa dos leptões que desprezamos no limite das altas energias. Então para $\sqrt{s} \gg m_W$ obtemos

$$\mathcal{M} \simeq \frac{g_w^2}{s} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (4.98)$$

o que comparado com a Eq. (4.82) mostra que

$$G_F \rightarrow \frac{g_w^2}{s} \quad (4.99)$$

Então o cálculo da secção eficaz dá

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-) \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (4.100)$$

o que está de acordo com a unitariedade. Como dissemos atrás, embora deixe de haver problema para este processo, outros há em que os problemas persistem. Para vermos isso consideremos o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^- \quad (4.101)$$

no quadro do modelo IVB. Temos então o diagrama da Fig. (4.9). A amplitude é

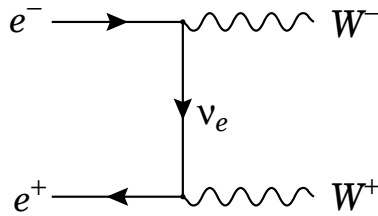


Figura 4.9: Colisão $e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$.

proporcional a

$$\mathcal{M} \sim g_w^2 \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) \epsilon_\mu^*(q_2, \lambda_2) \bar{v}(p_2)\gamma^\nu(1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 - \not{q}_1}{(p_1 - q_1)^2} \gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \quad (4.102)$$

No limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ obtemos (ver Problema 4.7)

$$\overline{|M|^2} \sim \frac{g_w^4}{m_W^4} s f(\theta) \quad (4.103)$$

64 Capítulo 4. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

o que mostra que temos novamente o mesmo problema que na teoria pontual de Fermi, como se vê comparando com a Eq. (4.83). Um estudo mais detalhado mostra que o problema está na polarização longitudinal dos W 's (ver Problema 4.8). Notar que o processo semelhante

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (4.104)$$

em QED não tem qualquer problema. Podemos assim suspeitar que a invariância de gauge de QED, relacionada com a massa zero do fóton, e a ausência de polarização longitudinal, deve ser a chave do problema.

Problemas Capítulo 4

4.1 Mostre que da equação de Dirac se obtém para as componentes ψ_L e ψ_R

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (4.105)$$

Comente este resultado.

4.2 Resolva a Eq. (4.76) para encontrar o propagador duma partícula de spin 1 com massa. Para isso faça

$$G_F^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (4.106)$$

e determine as funções invariantes $A(k^2)$ e $B(k^2)$.

4.3 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$. Mostre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_f^2}{16\pi^2} s(1 + \cos\theta)^2 \quad (4.107)$$

e

$$\sigma = \frac{g_F^2}{3\pi} s \quad (4.108)$$

4.4 Considere o problema 4.3 Mostre que no referencial do centro de massa o momento angular é $J = 1$. Explique então porque é que

$$M \propto (1 + \cos\theta) \quad (4.109)$$

4.5 Considere o processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$. Mostre que

a) A secção eficaz diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi} s \quad (4.110)$$

b) A secção eficaz total é dada por

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (4.111)$$

66 Capítulo 4. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

c) Mostre que no C.M. temos só $J = 0$. Use esse facto para extrair um limite a partir do qual a unitariedade é violada.

4.6 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ na teoria IVB. Calcule a secção eficaz total e mostre que está de acordo com a Eq. (4.100).

4.7 Considere o processo $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ na teoria IVB. Calcule $d\sigma/d\Omega$ e σ e mostre que no limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ obtemos

$$\sigma \simeq \tag{4.112}$$

4.8 Mostre que o processo $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ só apresenta problemas no que diz respeito à unitariedade, para a polarização longitudinal do W . Para isso calcule separadamente a contribuição das polarizações transversais e longitudinais.

Capítulo 5

O Modelo Standard Eletrofraco: $SU(2)_L \times U(1)$

Aqui seguimos o capítulo 5 do meu texto FIE [7]. A matéria está também coberta no capítulo 9 do Griffiths [6].

5.1 Introdução

Vamos neste capítulo aplicar as ideias das teorias de gauge com quebra espontânea de simetria às interações fracas de quarks e leptões. Consideraremos o modelo específico associado aos nomes de Glashow [23], Weinberg [24] e Salam [25], que devido ao seu sucesso experimental se veio a tornar conhecido como o *modelo standard das interações eletrofracas*. Contudo antes de entrarmos em detalhes, tentemos responder a três questões:

- i)* Porquê uma teoria de gauge com quebra espontânea de simetria?
- ii)* Qual o grupo de simetria relevante?
- iii)* Quais as representações a escolher?

Começemos pela primeira. Há várias razões. Talvez a mais importante resulte do estudo da fenomenologia das interações fracas, onde aparecia claro que estas deviam ser mediadas por uma partícula de spin 1 (campo vetorial) e que esta partícula devia ter massa devido ao curto alcance das interações fracas (ver discussão no capítulo 4). Ora, depois de muito trabalho teórico mostrou-se que as únicas teorias consistentes, isto é, *renormalizáveis e unitárias*, com partículas de spin 1 com massa eram precisamente as teorias de gauge com quebra espontânea de simetria. Uma evidência adicional vem da existência duma universalidade de intensidades entre as interações de leptões e quarks se descontarmos a rotação de Cabibbo, efeito que, como veremos, não provém do sector de gauge da teoria, mas sim do sector das massas. Uma tal universalidade seria precisamente o que seria de esperar duma

teoria de gauge, onde uma constante g_w desempenhasse um papel semelhante à carga elétrica em QED.

As outras duas questões podem ser respondidas em simultâneo. Vimos que a estrutura das correntes fracas sugeria a ideia dum grupo de isospin fraco $SU_L(2)$ para as componentes esquerdas que participam na corrente carregada. Daí resultava que as componentes esquerdas deviam ser agrupados num dubleto. As componentes direitas dos campos carregados deveriam ser então singletos de $SU_L(2)$ para não participarem na interação fraca das correntes carregadas. Poderia o grupo ser então só $SU_L(2)$? Pensando um pouco logo se conclui que não. A razão prende-se com o facto de a estrutura das correntes de $SU_L(2)$ ser $V - A$. Então a componente 3 (neutra) também teria essa estrutura e não poderia ser identificada com a corrente eletromagnética que, como sabemos, tem acoplamento vetorial ao fóton. Portanto o bóson W_μ^3 não pode ser o fóton. Assim surgiu a ideia de alargar o grupo da forma mínima com um produto por um grupo Abelian obtendo-se portanto $SU(2) \times U(1)$. Como vimos no capítulo 3, havia neste caso dois bósons W_μ^3 e B_μ que se misturavam para dar um campo com massa a que chamámos Z_μ e outro, sem massa, designado por A_μ e que, como veremos no seguimento, se identificará com o fóton.

Este modelo prevê portanto, para além da corrente eletromagnética a existência de correntes fracas neutras, o que foi verificado experimentalmente. Os resultados experimentais mostram que a Natureza escolheu a hipótese mais simples. Nas secções seguintes descreveremos os vários aspetos do modelo.

5.2 O sector de gauge

O sector de gauge e de Higgs do modelo standard é aquele que já descrevemos no final da secção 3.3. Vamos aqui apenas resumir os resultados. Consideremos então a teoria de gauge para $SU_L(2) \times U_Y(1)$ com invariância local. O lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.2)$$

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a $SU_L(2)$ e a $U_Y(1)$, respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (5.3)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (5.4)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (5.5)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli. Depois do mecanismo da quebra espontânea de simetria vimos que a parte livre do lagrangeano se podia escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\
& - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} W^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde introduzimos os campos A_μ e Z_μ através das relações

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{5.7}$$

O ângulo θ_W foi determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula e obtivemos

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \tag{5.8}$$

Do lagrangeano na Eq. (5.6) resulta que temos um campo escalar com massa σ , que passaremos a designar por H . É o bóson de Higgs e a sua massa é dada por

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{5.9}$$

Além disso existem dois campos vetoriais $W_\mu^{1,2}$ com massa

$$M_{W^1, W^2} = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \tag{5.10}$$

e outro campo vetorial Z_μ com massa

$$M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)} \tag{5.11}$$

Em vez dos campos $W_\mu^{1,2}$ é usual introduzir um campo vetorial complexo W_μ^\pm através das relações

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad ; \quad W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \tag{5.12}$$

Então a massa deste campo será

$$M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \quad (5.13)$$

Comparando a Eq. (5.13) com a Eq. (5.11) e usando a definição 5.8 obtemos uma relação importante entre as massas do W e do Z

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (5.14)$$

Finalmente o outro campo vetorial A_μ não tem massa

$$M_A = 0 \quad (5.15)$$

Vemos assim que o campo A_μ deve ser identificado com o fóton. Esta identificação permite eliminar uma das constantes g e g' (ou equivalentemente g e θ_W) em termos da carga elétrica que corresponde ao gerador conservado

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (5.16)$$

Para isso escrevemos a derivada covariante em termos dos campos físicos, isto é,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \left(\partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \\ &= \left[\partial_\mu + i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \tau^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \tau^- \right. \\ &\quad \left. + ig \sin \theta_W Q A_\mu + i \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right) \right] \phi \end{aligned} \quad (5.17)$$

o que permite identificar

$$g \sin \theta_W = e \quad (5.18)$$

Como a carga elétrica é conhecida o único parâmetro a determinar é o ângulo θ_W .

5.3 As interações fracas dos leptões

A beleza das teorias de gauge é que as interações dos campos de matéria com os bósons de gauge ficam completamente determinadas pela invariância de gauge. Vimos isso já para o caso da interação com os campos de Higgs e o mesmo se passa para os fermiões. De facto no final do capítulo 2, já dissemos que forma devia ter o lagrangeano de qualquer fermião para a teoria $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Este era dado pela Eq. (2.65), da qual reproduzimos aqui a parte dos fermiões (os campos de gauge já foram discutidos na secção anterior). Obtemos

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i \not{D} - m) \Psi_f \quad (5.19)$$

onde

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW_\mu^a \Omega^a + ig'Y B_\mu) \Psi \quad (5.20)$$

onde as matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação em que os fermiões se encontrem. Temos portanto, antes de escrever as interações, descobrir quais as representações de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ em que se encontram os diferentes fermiões¹.

5.3.1 As representações e números quânticos

Os leptões conhecidos distribuem-se por 3 famílias com propriedades idênticas só diferindo na sua massa. Esta repetição que se verifica experimentalmente não é explicada pela teoria, mas introduzida para estar de acordo com a fenomenologia conhecida. No seguimento falaremos somente da família do eletrão (o eletrão e o seu neutrino), mas tudo o que dissermos e aplica às famílias do muão e do tau.

Como vimos no capítulo 4, as correntes carregadas que medeiam a interação fraca (troca do W_μ^\pm) são exatamente $V - A$, ou seja, nelas tomam parte somente a componente de helicidade esquerda dos leptões carregados. Para se obter isto é necessário tratar de forma diferente as duas helicidades das partículas carregadas. Assim e tendo em conta que o grupo que emerge da fenomenologia é $SU_L(2) \times U_Y(1)$, distribuímos o eletrão e o seu neutrino pelas seguintes representações de $SU_L(2)$, dito *isospin fraco*

$$E_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad ; \quad e_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad (5.21)$$

Portanto as componentes de helicidade esquerda do eletrão e do seu neutrino formam um dubleto de $SU_L(2)$, enquanto que a componente de helicidade direita do eletrão é um singlete do isospin fraco. A escolha na Eq. (5.21) determina as transformações de $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta E_L &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} E_L \\ \delta e_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Falta-nos então determinar as transformações sob a ação do grupo $U_Y(1)$. Estas serão em geral

$$\delta \ell = i\frac{\epsilon}{2} Y_\ell \ell \quad (5.23)$$

onde ℓ é qualquer componente de helicidade dos leptões, isto é $\ell = e_L, e_R, \nu_{eL}$, e Y_ℓ é um número, designado por *hipercarga fraca* diferente, em princípio, para cada

¹Não fizemos uma grande discussão deste ponto para os campos de Higgs, pois admitimos à partida que eles estavam em dubletos como tinha sido sugerido na discussão do mecanismo de Higgs no capítulo 3.

helicidade do leptão. Notar que isto exclui logo termos de massa para os leptões, pois estes são da forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -m (\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L) \quad (5.24)$$

e portanto não seriam invariantes nem para $SU_L(2)$, pois não é um singlete, nem para $U_Y(1)$ se as hipercargas fracas de ℓ_L e ℓ_R forem diferentes. O valor Y não é arbitrário pois o fóton deve acoplar com a corrente eletromagnética. Assim, usando as Eqs. (5.19) e (5.20), vemos que para uma dada helicidade do leptão ℓ devemos ter a seguinte interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \bar{\ell} \gamma^\mu \left[g W_\mu^3 T^3 + \frac{1}{2} g' B_\mu Y \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[A_\mu \left(g \sin \theta_W T^3 + \frac{1}{2} g' \cos \theta_W Y \right) + Z_\mu \left(g \cos \theta_W T^3 - \frac{1}{2} g' \sin \theta_W Y \right) \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma_\mu \left\{ W^\mu e \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) + Z^\mu \frac{g}{\cos \theta_W} \left[T^3 - \sin^2 \theta_W \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) \right] \right\} \ell \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde T^3 é o valor numérico do isospin fraco², (ver Tabela 5.1), para o leptão ℓ . Comparando a Eq. (5.25) com o que devíamos ter para a corrente eletromagnética,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eQ \bar{\ell} \gamma^\mu \ell A_\mu \quad (5.26)$$

onde $e = |e|$ e portanto Q é o valor da carga da partícula em unidades da carga do próton, obtemos então

$$Q = T^3 + \frac{1}{2} Y \quad (5.27)$$

o que determina Y .

	e_L	e_R	ν_L
T^3	-1/2	0	+1/2
Y	-1	-2	-1
Q	-1	-1	0

Tabela 5.1: Números quânticos para os leptões.

Esta tabela implica a seguinte forma para as derivadas covariantes,

$$D_\mu E_L = \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) E_L$$

²Mais rigorosamente é o valor próprio da matriz $T^3 = \frac{\tau^3}{2}$ no dubleto E_L e zero no singlete e_R .

$$= \left[\partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-) + ieQA_\mu + i\frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{\tau^3}{2} - \sin^2\theta_W Q \right) Z_\mu \right] E_L$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu - ig'B_\mu)e_R = (\partial_\mu - ieA_\mu + ie \tan\theta_W Z_\mu) e_R \quad (5.28)$$

Das expressões anteriores é fácil obter as interações dos leptões com os campos de gauge, as chamadas correntes fracas carregada e neutra. O lagrangeano dos leptões no limite em que as massas dos leptões são nulas é

$$\mathcal{L}_{\text{leptões}} = i\bar{E}_L \not{D} E_L + i\bar{e}_R \not{D} e_R + \text{termos iguais para o } \mu \text{ e para o } \tau. \quad (5.29)$$

Usando a Eq. (5.28) podemos escrever os termos de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- \\ & - \frac{g}{4 \cos\theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 - 4 \sin^2\theta_W - \gamma_5) e \right] Z_\mu \\ & - (-e) \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \end{aligned} \quad (5.30)$$

O termo proporcional a A_μ representa a interação eletromagnética como descrita em QED. Daremos alguns exemplos das outras interações mediadas por W_μ^\pm e Z_μ .

5.3.2 As correntes carregadas

Do lagrangeano de interação na Eq. (5.30) concluímos que os vértices relevantes são os indicados na Fig. (5.1).

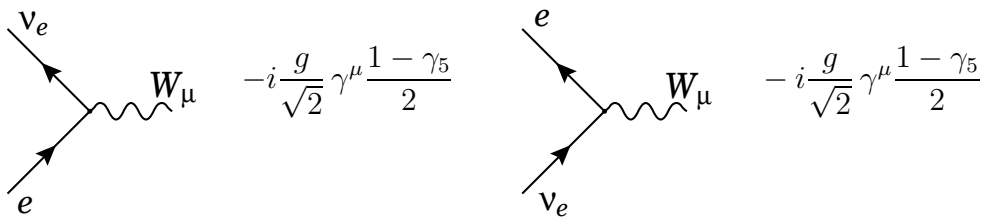


Figura 5.1: Vértices da corrente carregada.

Um exemplo típico é o decaimento do múon

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (5.31)$$

que, como vimos, corresponde ao diagrama da Fig. (5.2). O cálculo deste processo

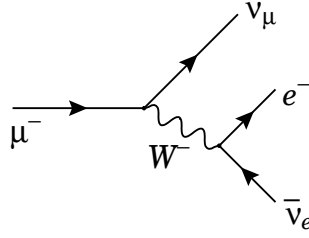


Figura 5.2: Decaimento do muão.

no limite das baixas energias dá uma amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_W^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \quad (5.32)$$

que coincide com a amplitude do modelo fenomenológico das interações fracas de Feynman e Gell-Mann, descrito no capítulo 4, se identificarmos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (5.33)$$

onde G_F é a constante de Fermi. Isto permite obter uma estimativa de massa do W . De facto usando a Eq. (5.18) obtemos

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g^2}{4\sqrt{2}G_F} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \text{ GeV} \\ &= \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} = \frac{(37.5 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para o presente valor $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ obtemos

$$M_W \simeq 78 \text{ GeV} \quad (5.35)$$

Este valor está um pouco abaixo do valor experimental atualmente aceite

$$M_W = 80.37 \pm 0.17 \text{ GeV} \quad (5.36)$$

A diferença está no facto de que a Eq. (5.34) é somente válida na aproximação de Born (nível árvore). Com a introdução das correções radiativas ela passa-se a escrever

$$M_W^2 = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} \frac{1}{1 - \Delta r} \quad (5.37)$$

onde Δr encerra as correções de ordem superior. Atualmente o valor para Δr é

$$\Delta r = 0.06 \quad (5.38)$$

o que faz subir M_W para o valor para o indicado na Eq. (5.36). Uma maneira de entender estas correções é dizer que a intensidade da interação eletromagnética à escala da massa do Z é maior que no limite de baixa energia onde α é medida. Mais precisamente

$$\alpha(M_Z) = \frac{\alpha}{(1 - \Delta r)} \simeq \frac{1}{128.8} \quad (5.39)$$

5.3.3 As correntes neutras

É usual escrever a interação do Z^0 , Eq. (5.30), numa forma aplicável a qualquer fermião f . Para isso escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^Z &= -\frac{g}{\cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma_5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] Z^\mu \\ &+ \text{termos iguais para os outros leptões} \\ &= -\frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f Z_\mu \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde

$$g_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q^f \sin^2 \theta_W \quad ; \quad g_A^f = \frac{1}{2} T_3^f \quad (5.41)$$

O lagrangeano na Eq. (5.40) dá então origem ao vértice da Fig. (5.3). Um exemplo

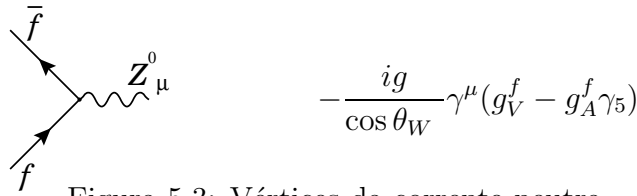


Figura 5.3: Vértices da corrente neutra

típico é a difusão elástica

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad (5.42)$$

a que corresponde o diagrama da Fig. (5.4). A amplitude para baixas energias é

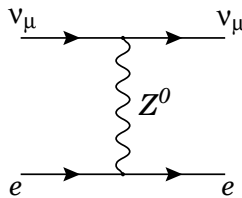


Figura 5.4: Diagrama para o processo $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$.

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W M_Z^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (5.43)$$

Usando a Eq. (5.14) conclui-se que

$$M_W^2 = M_Z^2 \cos^2 \theta_W \quad (5.44)$$

e portanto as Eqs. (5.34) e (5.44) permitem escrever a Eq. (5.43) na forma

$$\mathcal{M} = \sqrt{2} G_F \left[\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (5.45)$$

Foi a descoberta experimental do processo na Eq. (5.42) e também do processo

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e \quad (5.46)$$

mediados pela corrente neutra que constituíram a primeira validação, antes da experiência do LEP, do modelo de Glashow-Weinberg-Salam.

5.4 A introdução dos quarks

As interações fracas dos hádrões podem ser explicitadas a partir das interações fracas dos quarks que são os seus constituintes. Nós faremos as seguintes hipóteses:

- i) Os quarks aparecem em diferentes sabores. Experimentalmente necessitam-se de 6: $u, d, s, c, b, e t$.*
- ii) Para cada sabor os quarks aparecem em 3 cores distintas, mas os hádrões são singletos de cor.*
- iii) As correntes eletromagnéticas e fracas são singletos de cor e atuam somente no espaço dos sabores.*

Uma vez expostas as nossas hipóteses, que incorporam o que é conhecido experimentalmente, vamos agora especificar as propriedades de transformação dos quarks, de helicidades esquerda e direita, sob a ação do grupo $SU(2) \times U(1)$. Para isso damos os valores de T^3 e Y na Tabela 5.2. Nesta tabela d_c e s_c são as seguintes

	u_L	d_{cL}	c_L	s_{cL}	u_R	d_R	c_R	s_R	t	b
T^3	1/2	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	0	1/2	-1/2
Y	1/3	1/3	1/3	1/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3
Q	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3

Tabela 5.2: Números quânticos dos quarks.

misturas de d e s

$$\begin{cases} d_c = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ s_c = -\sin \theta_c d + \cos \theta_c s \end{cases} \quad (5.47)$$

onde θ_c é o ângulo de Cabibbo, conforme introduzido na secção 4.3.1. De facto estamos aqui a simplificar. Com a introdução dos quarks b e t , a matriz de rotação 2×2 entre d e s deve ser generalizada para uma matriz de rotação 3×3 no espaço d , s e b , a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [21, 26]. Isto será explicado mais à frente quando falarmos das massas dos quarks. Em primeira aproximação é contudo verdade que o efeito dominante é a rotação de Cabibbo, isto é, consideramos só a mistura entre d e s . Dentro desta aproximação as representações de $SU_L(2)$ são

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (5.48)$$

Usando a Eq. (5.28) como analogia e os valores da Tabela 5.2, é fácil escrever o lagrangeano de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u W_\mu^- \\ & + \left(\frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e\bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \frac{1}{2}\bar{d}_{cL}\gamma^\mu d_{cL} \right) Z_\mu \\ & + \tan\theta_W \left(\frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e\bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) Z_\mu \\ & + \begin{pmatrix} u & \rightarrow c \\ d_c & \rightarrow s_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rightarrow t \\ d_c & \rightarrow b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

o que se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_c + \bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \right] W_\mu^+ \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[d_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u + \bar{s}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)c + \bar{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)t \right] W_\mu^- \\ & + e \left[\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c + \frac{2}{3}\bar{t}\gamma^\mu t - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma^\mu s - \frac{1}{3}\bar{b}\gamma^\mu b \right] A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \sum_{f=\text{quarks}} \bar{f}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma_5)f Z_\mu \end{aligned} \quad (5.50)$$

com g_V^f e g_A^f dados pela Eq. (5.41). Notar que a interação mediada pela corrente carregada tem exatamente a forma encontrada fenomenologicamente por Cabibbo para os acoplamentos semi-leptônicos $\Delta S = 0, 1$. Por outro lado a corrente neutra obedece à regra de seleção $\Delta S = 0$, isto é, o mecanismo de GIM está incorporado no modelo.

O lagrangeano da Eq. (5.50) descreve portanto as interações fracas e eletromagnéticas dos quarks, isto é as correspondentes ao grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$. As interações fortes são explicadas pela teoria de gauge da cor, isto a Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta é a teoria de gauge do grupo $SU(3)_{\text{cor}}$. De acordo com as nossas hipóteses os geradores de $SU(3)_{\text{cor}}$ devem comutar com os de $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Portanto o grupo *fenomenológico* que descreve as interações fracas, eletromagnéticas e fortes é

$$G = SU(3)_{\text{cor}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.51)$$

5.5 A Massa dos Fermiões

5.5.1 A massa dos leptões

Como as transformações do grupo $SU(2) \times U(1)$, (ver as Eqs. (5.22) e (5.23)), tratam de forma diferente as duas helicidades, um termo de massa para os leptões não é invariante sob a aceção de $SU(2) \times U(1)$. De facto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} &= -m_e \bar{e}e = \\ &= -m_e (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \end{aligned} \quad (5.52)$$

e numa transformação de $U(1)$, por exemplo, obtemos

$$\delta_Y \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} = -m_e \frac{i}{2} \varepsilon (\bar{e}_R e_L - \bar{e}_L e_R) \neq 0 \quad (5.53)$$

A maneira de resolver esta dificuldade é exigir que antes da quebra espontânea de simetria os leptões não tenham massa e que seja o próprio mecanismo de quebra de simetria que dê origem à massa. Isto é possível mediante novas interações a juntar ao lagrangeano entre os leptões e os escalares, ditos campos de Higgs. Para formarmos termos de massa para os leptões carregados, temos portanto de construir primeiro um termo no lagrangeano que seja invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Façamos isso primeiro para o electrão. Com o dubleto E_L e o dubleto de Higgs ϕ podemos formar um singlete de $SU_L(2)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} Y(E_L) &= -1 \\ Y(\phi) &= +1 \end{aligned} \quad (5.54)$$

pelo que um termo de forma $E_L^\dagger \phi$ é singlete de $SU_L(2)$ e tem hipercarga fraca

$$Y(E_L^\dagger \phi) = Y(E_L^\dagger) + Y(\phi) = +2 \quad (5.55)$$

Mas $E_L^\dagger \phi$ não é invariante de Lorentz, pois falta um spinor de helicidade direita. Notando que

$$Y(e_R) = -2 \quad (5.56)$$

concluimos que o lagrangeano invariante de Lorentz e invariante para $SU_L(2) \times U(1)$ é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e \bar{E}_L \phi e_R + \text{h.c.} \quad (5.57)$$

onde f_e é uma constante de acoplamento sem dimensões. Para vermos que este lagrangeano dá massa ao eletrão, notemos que quando se dá o fenómeno de quebra espontânea de simetria temos

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \dots \quad (5.58)$$

pelo que obtemos (tomamos f_e real)

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e v (\bar{e}_R e_L) + \dots \quad (5.59)$$

donde se conclui que

$$f_e = \frac{m_e}{v} = 2.8 \times 10^{-6} \quad (5.60)$$

A introdução do muão e do tau é agora trivial. Há contudo um detalhe que vale a pena explicar. O lagrangeano mais geral que dá massa aos leptões carregados é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \bar{E}(i) \phi e_R(j) \quad (5.61)$$

onde usámos a notação

$$e(1) = e ; e(2) = \mu ; e(3) = \tau \quad (5.62)$$

Em geral a matriz f_{ij} não é diagonal. Para encontrarmos os estados físicos teríamos de diagonalizar a matriz de massa e rodar os campos das interações para os campos físicos. Contudo, se os neutrinos não tiverem massa é sempre possível redefinir os campos dos neutrinos e acabar com novos campos que são diagonais tanto na matriz de massa como nos termos de interação. Portanto podemos desde logo escrever 5.61 na forma diagonal

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{i=1}^3 f_i \bar{E}_L(i) \phi e_R(i) \quad (5.63)$$

Para este argumento é essencial que os neutrinos não tenham massa. Como veremos não é possível utilizar o mesmo argumento para os quarks resultando daí a

matriz de Cabibbo (ou mais geralmente a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)). Hoje sabe-se que, embora muito pequena (menor que 1 eV), os neutrinos têm massa. Para explicar a massa dos neutrinos é preciso generalizar o modelo standard. Nessas generalizações aparece então o equivalente à matriz CKM. Nós neste curso introdutório vamos continuar a considerar que os neutrinos não têm massa o que é uma aproximação muito boa para as experiências nos aceleradores.

5.5.2 A massa dos quarks

Consideremos agora o problema de massa dos quarks. O problema é mais complicado por duas razões. Uma que tem que ver com a impossibilidade de diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa e as interações como foi afirmado atrás e será discutido mais à frente. A outra é mais técnica. Para percebermos o problema consideremos os quarks da primeira família

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad ; \quad u_R, d_R \quad (5.64)$$

Se considerarmos uma interação da forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d \bar{Q}_L \phi d_R + \text{h.c.} \quad (5.65)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d v (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \dots \quad (5.66)$$

e obtemos massa para o quark d , mas não para o quark u . É fácil de ver que

$$Y(\bar{Q}_L \phi u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = +2 \quad (5.67)$$

e portanto o termo $(\bar{Q}_L \phi u_R)$ não é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Como resolver este problema? Felizmente a solução não é muito difícil. Numa transformação de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ o dubleto transforma-se da forma seguinte

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi & SU_L(2) \\ \delta\phi &= i\frac{\varepsilon}{2} \phi & U_Y(1) \end{aligned} \quad (5.68)$$

Consideremos agora o dubleto $\tilde{\phi}$ definido por

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^- \equiv (\phi^+)^* \quad (5.69)$$

Vejamos agora como se transforma $\tilde{\phi}$. Para $SU_L(2)$

$$\delta\tilde{\phi} = i\tau_2 (\delta\phi)^+$$

$$\begin{aligned}
&= i\tau_2 \left(-i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi^* \right) \\
&= \epsilon^a \tau_2 \tau^{a*} \frac{1}{2} \phi^*
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Usando agora a identidade

$$\tau_2 \tau^{a*} \tau_2 = \tau^a \tag{5.71}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\phi} &= -\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tau_2 \phi^* \\
&= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} (i\tau_2 \phi^*) \\
&= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tilde{\phi}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

isto é, transforma-se exatamente como ϕ . Mas numa transformação de $U_Y(1)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi)^* = i\tau_2 \left(+i\frac{\epsilon}{2} \phi \right)^* \\
&= -i\frac{\epsilon}{2} (i\tau_2 \phi^*) = -i\frac{\epsilon}{2} \tilde{\phi}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

o que mostra que $\tilde{\phi}$ tem hipercarga fraca igual a -1 . Então um termo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -h_u \bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \text{h.c.} \\
&= -h_u v (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \dots
\end{aligned} \tag{5.74}$$

é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, pois

$$Y \left(\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R \right) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 0 \tag{5.75}$$

e dá massa ao quark u . Precisamos portanto do dubleto ϕ para dar massa aos quarks com $T_3 = -1/2$ e do dubleto $\tilde{\phi}$ para dar massa aos quarks com $T_3 = +1/2$.

O termo mais geral que dá massa aos quarks é portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -\sum_{i,j} h_{dij} \bar{Q}_L(i) \phi d_R(j) \\
&\quad -\sum_{i,j} h_{uij} \bar{Q}_L(i) \tilde{\phi} u_R(j)
\end{aligned} \tag{5.76}$$

numa notação óbvia. Vemos assim que há uma matriz de massa para os quarks de baixo com $T_3 = -1/2$, e outra para os quarks de cima com $T_3 = +1/2$. É

possível diagonalizar estas matrizes e passar o efeito para os termos de interação. Os termos de corrente neutra continuarão diagonais, mas nos termos de corrente carregada tal não acontecerá. De facto a corrente neutra liga os quarks de cima com os quarks de cima e os de baixo com os baixo, e portanto teremos sempre termos diagonais se usarmos a unitariedade das matrizes. Isso não acontece para as correntes carregadas pois elas misturam os quarks de cima com os de baixo que são diagonalizados de maneira diferente. O resultado é uma matriz de mistura, que convencionalmente se coloca nos quarks de baixo, a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21, 26],

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

que tem 3 ângulos e uma fase independentes, e portanto 4 parâmetros físicos. Para vermos o mecanismo, consideremos o modelo só com duas famílias de quarks. Então o lagrangeano de massa dos quarks pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = & -h_{u1}v \bar{u}u - h_{u2}v \bar{c}c \\ & -h_{d1}v \bar{d}_c d_c - h_{d2}v \bar{s}_c s_c \\ & -h_{d12}v (\bar{d}_c s_c + \bar{s}_c d_c) \end{aligned} \quad (5.78)$$

onde se usou a liberdade referida atrás para escrever os quarks u e c diretamente na forma diagonal. Olhemos para a matriz dos quarks de baixo. Escrevemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = -(\bar{d}_c \quad \bar{s}_c) \begin{pmatrix} h_{d1}v & h_{d12}v \\ h_{d12}v & h_{d2}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

Agora o ângulo de Cabibbo pode ser facilmente compreendido. De facto do ponto de vista das interações fortes, a matriz de massa deve ser diagonal nos quarks d e s . Então se introduzirmos

$$(d_c \quad s_c) = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

na Eq. (5.79) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = -(\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

$$= -(\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

onde

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \cos \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\
m_{12} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\
m_{21} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\
m_{22} &= \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

A condição $m_{12} = m_{21} = 0$ tem como solução

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2h_{d12}}{h_{d2} - h_{d1}} \tag{5.84}$$

isto é relaciona os parâmetros do lagrangeano com o ângulo de Cabibbo. É usual em vez de usar os parâmetros h_{uij} e h_{dij} , usar os valores experimentais das massas dos quarks e os elementos da matriz de rotação. Esta para o caso de três famílias de quarks é a matriz CKM.

5.6 Exemplos

5.6.1 Colisão elástica elétron-neutrino

5.6.2 O decaimento do muão

Problemas Capítulo 5

5.1 Considere a difusão elástica

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^+ \quad (5.85)$$

a) Considere apenas o diagrama do W . Mostre que no limite das baixas energias

$$M^{(a)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u(e) \quad (5.86)$$

b) Considere agora o diagrama do Z . Mostre que

$$M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5)u(e) \quad (5.87)$$

e portanto

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(C_V - C_A\gamma_5)u(e) \quad (5.88)$$

com

$$C_V = 2\sin^2\theta_W \frac{1}{2} \quad ; \quad C_A = \frac{1}{2} \quad (5.89)$$

Este processo permite portanto distinguir uma teoria com $V - A$ puro ($C_V = C_A = 1$) do Modelo Standard. O resultado experimental confirma a estrutura do Modelo Standard com as correntes neutras.

5.2 Considere o processo $\nu_e + e \rightarrow \nu_\mu + e$. Este processo ocorre via corrente neutra. Mostre que a amplitude é

$$M = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(\nu) \bar{u}(e)\gamma_\mu(C'_V - C'_A\gamma_5)u(e) \quad (5.90)$$

com

$$C'_V = \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W \quad ; \quad C'_A = \frac{1}{2} \quad (5.91)$$

enquanto que numa teoria sem correntes neutras seria

$$C'_V = C'_A = 0 \quad (5.92)$$

5.3 Considere o processo $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ no Modelo Standard.

a) Calcule $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

b) Calcule σ . Mostre que quando $\sqrt{s} \gg M_W, m_e$, se tem

$$\sigma \simeq \frac{\pi\alpha^2}{2\sin^2\theta_W} \frac{1}{s} \ln\left(\frac{s}{m_W^2}\right) \quad (5.93)$$

em contraste com o que se obtém no modelo IVB (ver problema 4.7).

Bibliografia

- [1] J. C. Romão, *Introdução à Teoria do Campo* (IST, 2016), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/itc.pdf>.
- [2] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1962).
- [3] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, N.Y., 1964).
- [4] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [5] J. C. Romão, *Advanced Quantum Field Theory* (IST, 2017), Available online at <http://porthos.tecnico.ulisboa.pt/Public/textos/tca.pdf>.
- [6] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (Weinheim, Germany: Wiley-VCH., 2008).
- [7] J. C. Romão, *O Modelo Standard das Interações Electrofracas* (IST, 2010), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/fe.pdf>.
- [8] C.-N. Yang and R. L. Mills, *Phys.Rev.* **96**, 191 (1954).
- [9] Y. Nambu, *Phys.Rev.* **117**, 648 (1960).
- [10] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [11] E. Abers and B. Lee, *Phys.Rept.* **9**, 1 (1973).
- [12] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).
- [13] F. Englert and R. Brout, *Phys.Rev.Lett.* **13**, 321 (1964).
- [14] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585 (1964).
- [15] A. Bettini, *Elementary Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

- [16] E. Commins and P. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press, 1983).
- [17] G. Gamow and E. Teller, Phys.Rev. **49**, 895 (1936).
- [18] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [19] C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes and R. Hudson, Phys.Rev. **105**, 1413 (1957).
- [20] R. Feynman and M. Gell-Mann, Phys.Rev. **109**, 193 (1958).
- [21] N. Cabibbo, Phys.Rev.Lett. **10**, 531 (1963).
- [22] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).
- [23] S. Glashow, Nucl.Phys. **22**, 579 (1961).
- [24] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [25] A. Salam, Conf.Proc. **C680519**, 367 (1968), Originally printed in Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings of the Nobel Symposium held 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm.
- [26] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).