Exame de Electromagnetismo e Óptica

Cursos de Química, Eng. Química, Eng. Biológica e Eng. do Ambiente

1ª Época – 18/1/2005

I (4.5 valores)

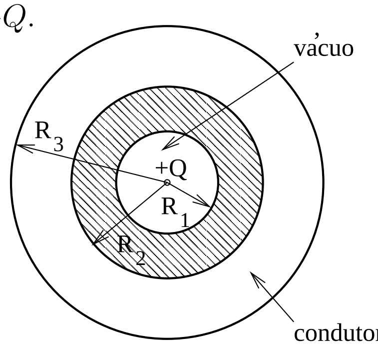
Considere um condutor **neutro** limitado pelas superfícies esféricas de raios R_2 e R_3. Na cavidade deste condutor encontra-se um diléctrico linear isótropo e homogéneo de constante dieléctrica ϵ_1. O dieléctrico é limitado pelas superfícies esféricas de raios R_1 e R_2, conforme indicado na figura. No centro das superfcíes esféricas encontra-se uma carga positiva $+Q$.

a) Determine $\vec{E}$, $\vec{D}$ e $\vec{P}$ em todo o espaço.

b) Faça um gráfico (esboço) da variação de $|\vec{D}|$ e $|\vec{E}|$ em função da distância r ao centro.

c) Determine a distribuição de cargas no condutor. Verifique que a carga total no condutor se mantém nula.

d) Determine as densidades de carga de polarização no dieléctrico, ρ' e σ'.



II (4 valores)

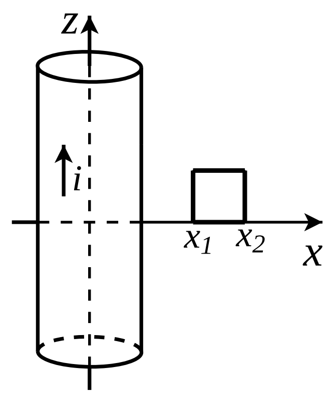
Considere um condutor cilíndrico **infinito** de raio r percorrido por uma corrente i **uniformemente** distribuída pela secção. A uma distância r da superfície do cilindro encontra-se uma espira quadrada de resistência R e lado r, conforme indicado na figura. O plano da espira é o plano xOz indicado, e $x_1 = 2r$, $x_2 = 3r$.

a) Descreva as linhas de força do campo $\vec{B}$. Calcule $\vec{B}$ num ponto genérico $P(x, z)$ no **1º quadrante** do plano xOz (considere pontos dentro e fora do cilindro).

b) Calcule o fluxo através da espira.

c) Suponha agora que $i = \cos \omega t$ (admita a hipótese quasi-estacionária). Calcule a f.e.m. $\mathcal{E}$ induzida na espira nestas condições.

d) Se a espira tiver resistência R determine a corrente induzida e discuta o seu sentido para $0 < \omega t < \pi/2$.



III (5 valores)

Considere uma onda plana monocromática com frequência $f = 10^6$ Hz que se propaga no vazio. O campo $\vec{E}$ da onda é dado por

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right] \\ E_z &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right] \end{cases}$$

com $E_0 = 10^{-1}\ V/m$. Determine:

a) A direcção de propagação da onda.

b) O comprimento de onda.
c) A polarização da onda.
d) O valor médio do vector de Poynting.
e) A onda incide na superfície de separação **vazio**$(z > 0)$/**vidro**$(z < 0)$, situada no plano $z = 0$. Escreva o **vector de onda** para a onda transmitida ($n_{\text{vidro}} = 1.5$).

IV (5 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. Como sabe, as funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são:

$$\chi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

a) Suponha que o electrão se encontra no estado

$$\psi_a(x,0) = \frac{1}{2}\chi_1(x) + A\chi_2(x) + B\chi_4(x)$$

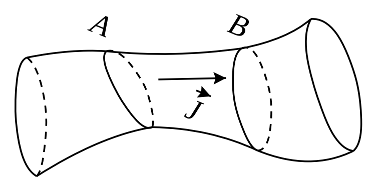
Qual probabilidade de uma medida da energia do sistema dar o valor E_3?
b) Determine A e B (reais e positivos) sabendo que $\langle E\rangle = \frac{25}{4}\,E_1$.
c) Considere agora o estado

$$\psi_b(x,0) = C\chi_1(x) + D\chi_2(x)$$

Determine C e D sabendo que $\langle x\rangle = \dfrac{a}{2} + \dfrac{16a}{9\,\pi^2}$ e que C e D são reais com $C > 0$.
d) Qual o valor médio do quadrado do momento no estado ψ_b? Se não resolveu a alínea c) apresente o resultado em função de C e D.

V (1.5 valores)

Partindo da equação da continuidade em regime estacionário ($\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$), mostre que a **intensidade** da corrente que passa em duas secções arbitrárias A e B dum condutor é sempre a mesma independentemente da forma da secção, isto é $i_A = i_B$.



Formulário e Constantes

$$\int \sin^2(y)\ dy = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int \sin(ny)\sin(my)\ dy = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int y\sin^2(y)\ dy = \frac{y^2}{4} - \frac{\cos(2\,y)}{8} - \frac{y\ \sin(2\,y)}{4}$$

$$\int y\sin^2(2\,y)\ dy = \frac{y^2}{4} - \frac{\cos(4\,y)}{32} - \frac{y\ \sin(4\,y)}{8}$$

$$\int y\sin(y)\sin(2\,y)\ dy = \frac{\cos(y)}{2} - \frac{\cos(3\,y)}{18} + \frac{y\ \sin(y)}{2} - \frac{y\ \sin(3\,y)}{6}$$

$$c = 3\times10^8\ \text{m/s}\ ;\ \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\text{F/m}\ ;\ \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\text{H/m}\ ;\ Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.8\Omega$$