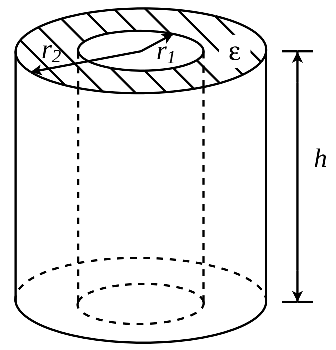
# Exame de Electromagnetismo e Óptica

## Cursos de Química, Eng. Química, Eng. Biológica e Eng. do Ambiente

## 2ª Época – 5/2/2005

### I ( 4.5 valores )

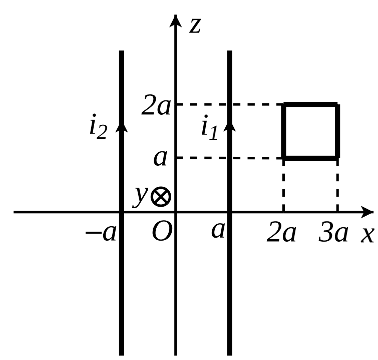
Considere um cilindro **infinito** de raio $r_1$ carregado com uma densidade de carga constante $\rho > 0$. A envolver o cilindro, entre os raios $r_1$ e $r_2$, encontra-se um material dieléctrico de constante dieléctrica $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. Na figura encontra-se representada (para efeitos de visualização) uma secção de altura $h$ deste **conjunto de altura infinita**.




a) Determine os campo $\vec{D}$, $\vec{E}$ e $\vec{P}$ em todos os pontos do espaço entre $0 < r < \infty$.
b) Faça um gráfico aproximado da variação de $|\vec{E}|$ e $|\vec{D}|$ com $r$ para $0 < r < \infty$.
c) Determine as densidades de carga de polarização $\sigma'$ nas superfícies interior ($r = r_1$) e exterior ($r = r_2$) do material dieléctrico.
d) Sabendo que o potencial é $\phi_0$ para $r = r_2$, determine $\phi(r)$ para $r > r_2$. Verifique que o potencial se anula para $r = r_2 \exp(\dfrac{2\epsilon_0\phi_0}{\rho r_1^2})$.

### II ( 4 valores )

Considere dois fios rectilíneos infinitos percorridos por correntes estacionárias $i_1$ e $i_2$, existentes no plano $xOz$, conforme indicado na figura.




a) Calcule $\vec{B}$ num ponto genérico $P(x, z)$ do plano $xOz$ para $i_1 = i$ e $i_2 = i$.
b) Faça um gráfico aproximado da variação da componente $B_y$, para pontos no plano $xOz$, com $x$. O sentido do eixo dos $yy$ está indicado na figura.
c) Suponha agora que $i_1 = i_0 \cos\omega t$ e $i_2 = 0$ (admita a hipótese quasi-estacionária). Calcule o fluxo através da espira quadrada de lado $a$ existente no plano dos fios, conforme indicado na figura.
d) Calcule a f.e.m. $\mathcal{E}$ induzida na espira nas condições da alínea anterior.
e) Se a espira tiver resistência $R$ determine a corrente induzida e discuta o seu sentido para $0 < \omega t < \pi/2$.

### III ( 5 valores )

Uma onda plana monocromática propaga-se num meio não magnético ($\mu \simeq \mu_0$). Sabe-se a expressão do campo $\vec{E}$:

$$\begin{cases} E_x &= E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\right] \\ E_y &= -E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\right] \\ E_z &= \alpha E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\right] \end{cases}$$

onde $\omega = 10^3\ rad/s$, $|\vec{k}| = 5 \times 10^{-6}\ m^{-1}$

a) Determine o índice de refração do meio onde a onda se propaga.
b) Determine a direcção de propagação.

c) Verifique que a expressão do campo $\vec{E}$ descreve uma onda transversal.
d) Determine $\alpha$ para que a onda descreva uma polarização circular esquerda.
e) Determine a amplitude $E_0$ sabendo que o valor médio do vector de Poynting é $\left\langle |\vec{S}| \right\rangle = 10^{-3}\ W/m^2$. Se não determinou $\alpha$ apresente o resultado em função deste parâmetro.

## IV ( 5 valores )

Seja um electrão no poço de potencial **simétrico**, isto é, $V = 0$ para $-a < x < a$ e $V = \infty$ para $x < -a$ e $x > a$. Como sabe, as funções próprias do operador hamiltoneano H ( i.e. da energia) são $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\chi_n^-(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ n^2$$

$$\chi_n^+(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\ \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

Considere o estado

$$\psi(x, 0) = A\ \chi_1^+(x) + B\ \chi_1^-(x)$$

a) Determine as constantes $A$ e $B$, sabendo que o valor médio da energia no estado $\psi$ é $\langle E \rangle = \frac{3}{4}E_0$. Considere $A$ e $B$ reais e positivas.
b) Qual a probabilidade de encontrar o sistema no estado $\chi_1^-(x)$? Justifique.
c) No instante $t = 0$ calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a]$.
d) Para além dos valores $x = \pm a$, verifique que há outro valor de $x$ para o qual a densidade de probabilidade $P(x, 0) = |\psi(x, 0)|^2$ se anula. Determine esse valor. Se não determinou $A$ e $B$ exprima o resultado em função destas constantes. **Nota:** Não complique. Observe que $P(x, 0) = 0$ *sse* $\psi(x, 0) = 0$.

## V ( 1.5 valores )

Considere um condutor carregado, com uma densidade de carga em superfície $\sigma$, colocado no vácuo. O condutor tem uma forma arbitrária. Usando as condições na fronteira para as componentes normais e tangenciais do campo $\vec{E}$ através duma superfície electrizada, determine o campo $\vec{E}$ à superfície do condutor, do lado de fora.

## Formulário e Constantes

$$\int \sin^2(y)\ dy = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\ \sin(2y)$$

$$\int \cos^2(y)\ dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\ \sin(2y)$$

$$\int \sin(y) \cos\left(\frac{y}{2}\right)\ dy = -\frac{4}{3}\ \cos^3\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}\ ;\ \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{F/m}\ ;\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}\ ;\ Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.8\Omega$$