Problemas Capítulo 6

Potenciais retardados

6.1 Mostre que os potenciais retardados dados pela Eq. (6.7) satisfazem a condição de Lorenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

6.2 Mostre que o primeiro termo da Eq. (6.16) para $\vec{B}$ corresponde à lei de Biot-Savart.

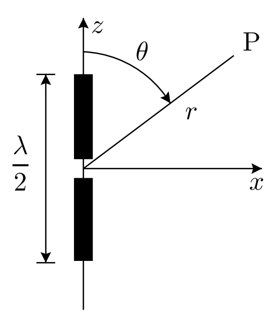
Dipolo oscilante

6.3 Mostre que se obtém a mesma expressão para ϕ, Eq. (6.14), partindo da sua definição:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(Q, t - r/c)}{r} dV \ ,$$

considerando a aproximação seguinte, isto é, não desprezando a variação de $t' = t - r/c$ dentro da distribuição de carga.

6.4 Uma antena para ser usada com a frequência $\omega = 2\pi c/\lambda$ é constituída por dois fios colineares, cada um com um quarto de comprimento de onda, como se indica na figura.



É alimentada na junção dos dois fios (origem) por uma tensão sinusoidal de frequência ω. A corrente resultante nos fios pode ser bem aproximada por

$$I = -I_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \ ,$$

para

$$-\frac{\lambda}{4} \leq z \leq \frac{\lambda}{4} \ .$$

Para calcular o radiamento da antena, esta pode ser considerada como uma sobreposição de muitos dipolos, cada um localizado no ponto z, de comprimento Δz, com momento dipolar variável de dipolo para dipolo.

a) Mostre que o momento dipolar elementar do dipolo colocado em z é

$$\Delta p = \left(\frac{I_0}{\omega} \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \cos\omega t\right) \Delta z \ .$$

b) Mostre que a grandes distâncias ($r \gg \lambda$) os campos são

$$E_\theta = \frac{2I_0}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$
$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta \ .$$

c) Faça um gráfico da variação de E_θ com θ para este caso e para o caso dum simples dipolo e compare.

d) Calcule o valor médio da potência radiada.

6.5 Considere uma carga q a oscilar em torno da origem, com velocidade v, tal que $v/c \ll 1$,

a) Mostre que os potenciais a grande distância podem escrever-se:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}(t-r/c)\cdot\vec{e_r}}{r^2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)\cdot\vec{e_r}}{cr}\right]\\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r} ,\end{aligned}$$

onde se conservaram termos até à ordem v/c e d/r (d é amplitude de oscilação da carga).

b) Mostre que em termos do momento dipolar $\vec{p}^{\,*}$ definido por

$$\vec{p}^{\,*} = \vec{p}(t-r/c) + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}(t-r/c) ,$$

o potencial escalar pode escrever-se:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}^{\,*}\cdot\vec{e}_r}{r^2}\right].$$

Interprete o resultado.

Cargas em movimento

6.6 Considere uma partícula que se move com velocidade $\vec{V}$ segundo o eixo x dum referencial S dado, e que a sua velocidade é constante.

a) Escreva as expressões do potencial escalar $\phi(x,y,z,t)$ e do potencial vector $\vec{A}(x,y,z,t)$ num ponto $P(x,y,z)$, no instante t.

b) Se considerarmos o referencial S', em que a partícula está em repouso, sabemos que as coordenadas e o tempo de S' estão relacionados com os de S por

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\\ y' &= y\\ z' &= z\\ t' &= \dfrac{t-\frac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} .\end{cases}$$

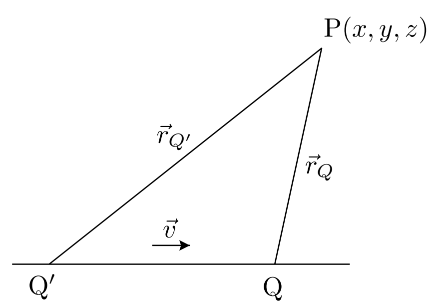
Calcule as expressões de ϕ e $\vec{A}$ no referencial S' e mostre que o conjunto (ϕ, A_x, A_y, A_z) tem as mesmas propriedades de transformação que o conjunto (t,x,y,z).

6.7 Estabeleça as Eqs. (6.71) e (6.72) para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

6.8 Mostre que, para grandes distâncias e para $v/c \ll 1$, as Eqs. (6.71) e (6.72) se reduzem às do dipolo oscilante, com

$$\ddot{\vec{p}} = q\vec{\gamma} .$$

6.9 Considere uma partícula carregada que se move com uma velocidade constante $\vec{v}$, de acordo com a figura



onde Q′ é a posição da partícula no instante retardado $t' = t - r_{Q'}/c$, e Q é a posição no instante t. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são dados por (no ponto P):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(1-\beta^2)\frac{\vec{r_{Q'}} - r_{Q'}\vec{\beta}}{(r_{Q'} - \vec{\beta}\cdot\vec{r}_{Q'})^3}$$

$$\vec{B} \quad = \quad \frac{1}{c} \frac{\vec{r}_{Q'} \times \vec{E}}{r_{Q'}} \; .$$

a) Mostre que a distância $\overline{Q'Q}$ vale $\beta r_{Q'}$.

b) Mostre que a distância $\overline{OP}$ vale $r_{Q'} - \vec{\beta} \cdot \vec{r}_{Q'}$.

c) Use os resultados anteriores para mostrar que $\vec{r}_{Q'} - r_{Q'}\vec{\beta} = \vec{r}_Q$, isto é, o campo duma carga em movimento uniforme aponta radialmente da sua posição presente e não da retardada.

d) Mostre que o campo da indução magnética $\vec{B}$ se pode escrever em termos da posição presente (não retardada) da partícula da seguinte forma

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \; . \qquad (6.73)$$

e) Mostre que no limite $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) a expressão para $\vec{B}$ se reduz à que se obtém aplicando a lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\, \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \; .$$

f) Suponha que a partícula está a mover-se segundo o eixo x e que no instante $t = 0$ passou pela origem. Use as expressões da alínea c), para mostrar que a intensidade do campo eléctrico num plano perpendicular à direcção do movimento e que contém a partícula é

$$\begin{aligned} E_\perp &= \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, \frac{1}{y^2 + z^2} \; , \end{aligned}$$

e que o campo eléctrico sobre o eixo x é

$$E_\parallel = E_x(x, 0, 0, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{1 - v^2/c^2}{(x - vt)^2} \; .$$

Interprete os resultados.