O circuito RLC

Na natureza são inúmeros os fenómenos que envolvem oscilações. Um exemplo comum é o pêndulo de um relógio, que se move periodicamente (ou seja, repetindo o seu movimento ao fim de um intervalo de tempo bem definido) em torno de uma posição de equilíbrio. Nos relógios mecânicos de menores dimensões o pêndulo foi substituido por uma massa ligada a uma mola que tem um comportamento em tudo semelhante ao do pêndulo. Nos relógios electrónicos o pêndulo é substituido por um sistema que gera oscilações, mas neste caso as oscilações são de natureza eléctrica.
O circuito RLC (R designa uma resistência, L uma indutância e C um condensador) é o circuito eléctrico oscilante por excelência. A sua simplicidade permite controlar fácilmente os parâmetros que caracterizam o seu funcionamento, o que o torna por isso um excelente candidato para a simulação de outros sistemas oscilantes (por exemplo mecânicos) em que o controlo de cada um dos parâmetros do sistema pode ser mais difícil.
Circuitos deste tipo são ainda extensivamente utilizado como elemento de filtragem em diferentes circuitos electrónicos: filtros passa-altos, passa-baixos e passa-banda.
Vamos, então, analisar mais em detalhe este circuito.

1. Introdução

O circuito RLC série está representado na Fig. 1. Tendo em conta a Lei das Malhas, podemos dizer que:

$$V_R + V_L + V_C = V(t)$$

Como sabemos que:

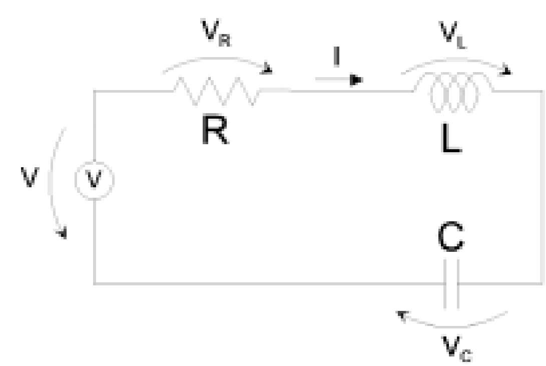

Figura 1: Circuito RLC série.

$$V_R = R.I \qquad V_L = L\frac{dI}{dt} \qquad V_C = \frac{1}{C}\int I dt$$

e que:

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

podemos escrever:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t),$$

ou de forma equivalente:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV(t)}{dt},$$

A partir desta equação temos condições para analisar alguns exemplos de casos particulares mais simples.

1.1. O circuito RC

Imaginemos que L=0, ou seja, que não existe a bobine e que a tensão V(t) é constante e dada por uma bateria ($V=V_0$), que pode ou não integrar-se no circuito. A equação do circuito vem:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V_0}{R}$$

ou

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = 0,$$

conforme a bateria esteja ou não incluida no circuito.

1.1.1. Carga do condensador

Imaginemos o circuito da Fig. 2. Inicialmente o condensador está descarregado, ou seja, $V_C=0$. No instante t=0 o interruptor é fechado, permitindo a passagem da corrente no circuito. A carga do condensador irá aumentar, até que a tensão no condensador iguale a da bateria quando $t \to \infty$. Neste momento a corrente é 0, e $Q=C.V_0$.
A equação do circuito vem:

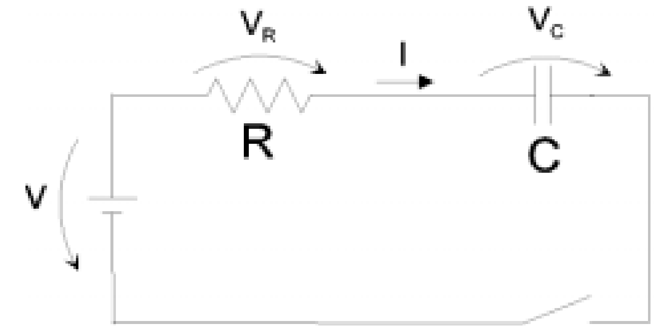

Figura 2: Circuito RC - Carga

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{V_0}{R}, \qquad \text{ou seja:} \qquad Q=CV_0-RC\frac{dQ}{dt}$$

Uma solução que satisfaz esta equação diferencial e as respectivas condições de fronteira é:

$$Q(t)=CV_0(1-e^{-t/RC})$$ com 1/RC = constante de tempo do circuito

Esta função está representada na Fig. 3.

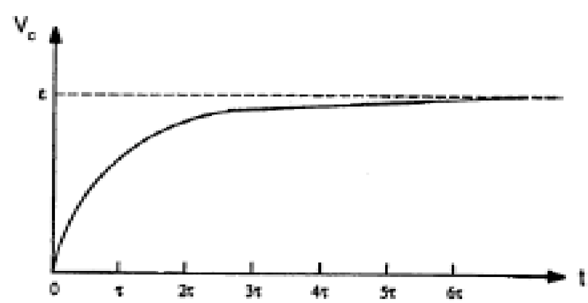

Figura 3 – Curva de carga de um condensador

1.1.2. Descarga do condensador

Imaginemos o circuito da Fig. 4. Inicialmente o condensador está carregado, ou seja, $V_C=V_0$. No instante t=0 o interruptor é fechado, podendo passar corrente no circuito. A carga do condensador irá diminuir, até que a tensão no condensador seja 0 quando $t\to\infty$.
A equação do circuito vem:

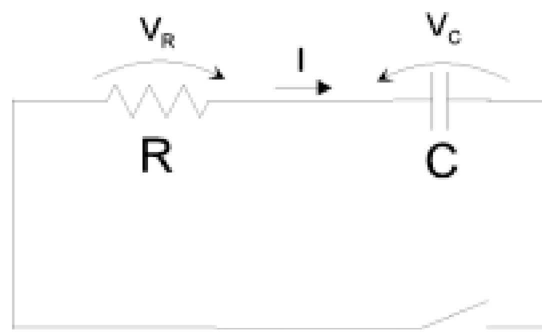

Figura 4: Circuito RC - Descarga

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{RC} Q = 0 , \qquad \text{ou seja:} \qquad Q = RC \frac{dQ}{dt}$$

Uma solução que satisfaz esta equação diferencial e as suas condições de fronteira é:

$$Q(t) = CV_0 e^{-t/RC}$$

Esta função está representada na Fig. 5.

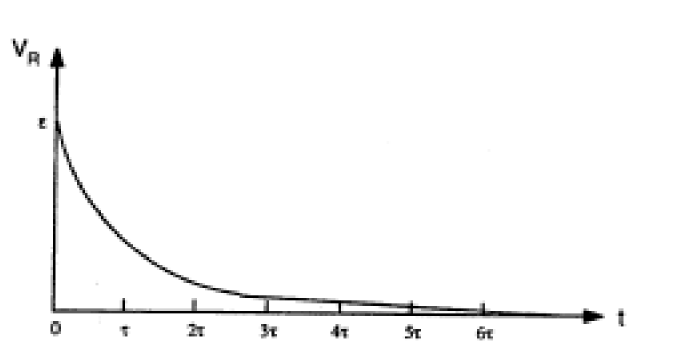

Figura 5: Curva de descarga de um condensador.

1.2. Circuito RLC - Ressonância

A Fig. 6 representa um circuito RLC série alimentado por um gerador de tensão sinusoidal alternada, representada por $V(t)=V_0\sin(\omega t)$.

A equação do circuito vem:

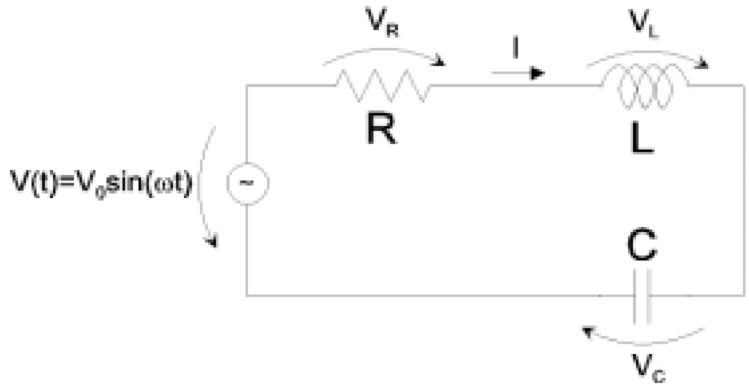

Figura 6: Circuito RLC série com fonte de tensão alternada sinusoidal.

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{d[V_0\sin(\omega t)]}{dt},\ \text{ ou seja:}\qquad \frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=\frac{V_0\omega}{L}\cos(\omega t)$$

Esta equação pode ser tomada como a parte real da equação complexa imaginária:

$\dfrac{d^2I}{dt^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{LC}I=\dfrac{V_0\omega}{L}e^{i\omega t}$, em que I toma a forma: $I=I_0e^{i(\omega t+\varphi)}$

Substituindo, vem:

$$-\omega^2I_0e^{i(\omega t+\varphi)}+i\frac{R}{L}\omega I_0e^{i(\omega t+\varphi)}+\frac{1}{LC}I_0e^{i(\omega t+\varphi)}=\frac{V_0\omega}{L}e^{i\omega t}$$

e simplificando:

$$-\omega^2I_0e^{i\varphi}+i\frac{R}{L}\omega I_0e^{i\varphi}+\frac{1}{LC}I_0e^{i\varphi}=\frac{V_0\omega}{L}$$

Resolvendo para o módulo de I_0 , vem:

$$I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}$$

A solução física para a corrente corresponde à parte real e é:

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

O parâmetro de fase, φ, determina-se por:

$$tg\varphi = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}$$

A intensidade da corrente que atravessa o circuito será máxima para a condição:

$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, ou seja: $\omega^2 = \frac{1}{LC} \equiv \omega_0^2$

Neste caso φ=0, e a amplitude máxima da intensidade da corrente é $I_{MAX} = \frac{V_0}{R}$.

2. Equipamento:

1. Multímetro Digital
2. Osciloscópio
3. Fonte de tensão-corrente regulável
4. Gerador de sinais
5. Resistências, condensadores, bobinas
6. Breadboard

3. Procedimento Experimental

3.1. O Circuito RC

3.1.1. Carga - Descarga

Monte o circuito da Fig. 7a. Programe o gerador de funções para que forneça um sinal **quadrado** com 2V de amplitude pico-a-pico e frequência f=10 Hz. Note que neste caso vai consecutivamente carregar e descarregar o condensador através da resistência. Desenhe as curvas obtidas para a tensão aplicada e para a tensão no condensador.

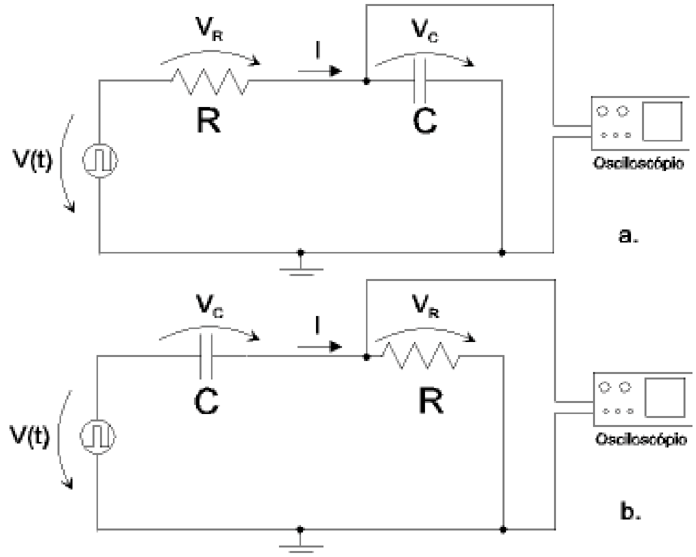

Figura 7: Medições no circuito RC. **a**: V_C ; **b**: V_R (I).
R=4,7kΩ , C=1,5μF

Monte agora o circuito da Fig. 7b. Use esta montagem para medir a corrente no circuito (indirectamente, através da tensão na resistência). O circuito é equivalente ao da Fig. 7a mas permite efectuar a medição com as ligações de terra do gerador e do osciloscópio no mesmo ponto do circuito. Desenhe as curvas obtidas para a tensão aplicada e para a corrente no circuito. Comente os gráficos obtidos.

Determine graficamente o valor de 1/RC (constante de tempo do circuito) a partir da derivada na origem das curvas de carga e de descarga. Compare com o valor esperado, recordando que:

$$\frac{dV(0)}{dt} = \pm \frac{V_0}{RC}$$

O valor de RC pode, assim, ser determinado pela intersecção da recta tangente na origem com o eixo das abcissas.

3.1.2. Resposta em Frequência

Volte a montar o circuito da Fig. 7a. Coloque o gerador de funções no modo **sinusoidal**. Aumente gradualmente a frequência até 1kHz. Registe os valores máximos de V_C obtidos para cada frequência. Interprete os resultados.

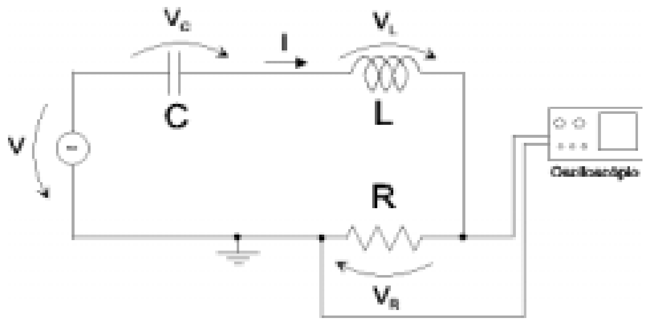

Figura 8: Montagem para medições no circuito RLC.
R=330Ω; C=1,5μF; L=100mH.

3.2. O Circuito RLC

Monte o circuito da Fig. 8. Programe o gerador de funções para fornecer um sinal **sinusoidal** de 10V de amplitude pico-a-pico a uma frequência de 10Hz. Tome nota da tensão na resistência. Varie a frequência gradualmente até 1kHz. Qual é a frequência de ressonância do circuito? (Nota: é aconselhável varrer mais finamente – ou seja, tirar pontos mais próximos – em torno da frequência de ressonância de forma a tornar a determinação, construção do gráfico, mais precisa). Como compara com a frequência esperada a partir dos valores nominais dos componentes no circuito?