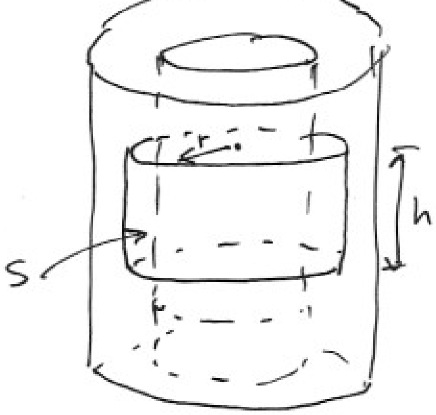
1ª Época EeO 30/6/2007

I

a) Por razões de simetria os campos são radiais apontando para fora do condutor ($\sigma > 0$). Temos sucessivamente



$0 < r < r_1$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{D} = \vec{P} = 0}$$ (dentro do condutor)

$r_1 < r < r_2$

Na superfície cilíndrica S temos

$$\int_S (\vec{D}\cdot\vec{n})\, dS = Q_{int} \quad \text{com} \quad Q_{int} = 2\pi r_1 h \sigma$$

logo

$$|\vec{D}|\, 2\pi r h = 2\pi r_1 h \sigma \quad \Rightarrow \quad |\vec{D}| = \sigma \frac{r_1}{r}$$

Portanto

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{r_1}{r}\vec{e}_r \; ; \; \vec{D} = \sigma\frac{r_1}{r}\vec{e}_r \; ; \; \vec{P} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma\frac{r_1}{r}\vec{e}_r}$$

$r > r_2$

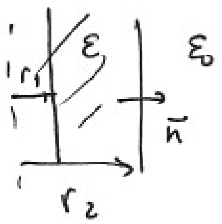
Do mesmo modo

$$\boxed{\vec{D} = \sigma\frac{r_1}{r}\vec{e}_r \; ; \; \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{r_1}{r}\vec{e}_r \; ; \; \vec{P} = 0}$$

b) $\sigma'_2 = \vec{P}\cdot\vec{n}$ com $\vec{n} \parallel \vec{e}_r \parallel \vec{P}$

logo $$\boxed{\sigma'_2 = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma\frac{r_1}{r_2}}$$

c) $E_{r_2} = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{r_1}{r_2}$; $E_{r_1} = +\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{r_1}{r_2}$



logo $E_{r_2} - E_{r_1} = \sigma\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \sigma\frac{r_1}{r_2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon}$

Comparando com a alínea b) vem

$$E_{r_2} - E_{r_1} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\underbrace{\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma\frac{r_1}{r_2}}_{\sigma_2'}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_2'$$

d) $\underline{0<r<r_1}$

$\Phi = 0$ (Potencial constante no condutor)

$\underline{r_1<r<r_2}$

$$\phi(r_1) - \phi(r) = \int_{r_1}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

usando $\phi(r_1)=0$ vem

$$\phi(r) = -\int_{r_1}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}r_1\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}r_1\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

logo $\boxed{\phi(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}r_1\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}$

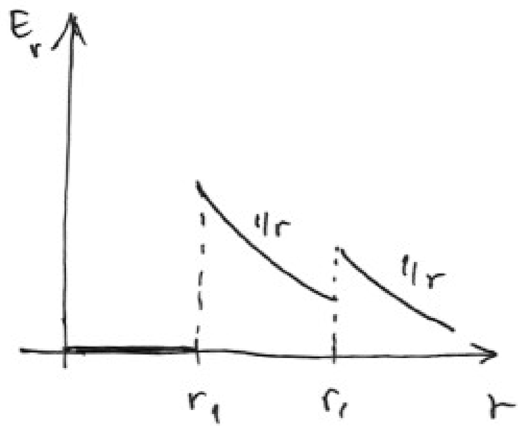
$\underline{r>r_2}$

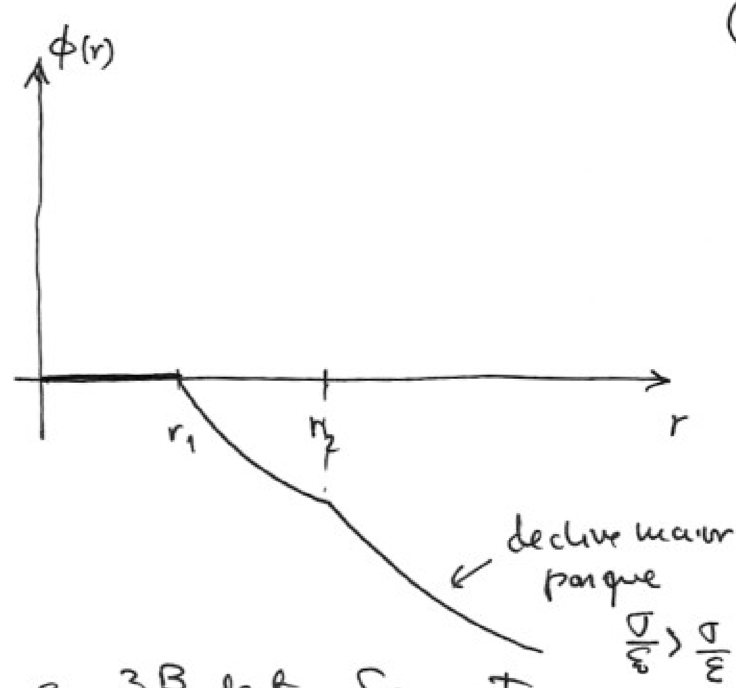
$$\phi(r_2) - \phi(r) = \int_{r_2}^{r}\vec{E}\cdot dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}r_1\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)$$

e portanto

$$\boxed{\phi(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}r_1\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}r_1\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}$$

e)





II

Ver soluções dos testes 2A e 3B deste Semestre.

III

a) Comparando com $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ obtém-se

$k_x = |\vec{k}|\,\alpha$; $k_y = 0$; $k_z = |\vec{k}|\,\beta$

$\vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \Rightarrow H_0 \sin[\,..\,]\,(\alpha+\beta)\,|\vec{k}| = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$

logo $\boxed{\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$

verificação: $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = |\vec{k}|\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\vec{k}|$ ✓

b) $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \Rightarrow \boxed{\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z}$

c) Polarização linear $\Rightarrow$ todas as componentes em fase, ou seja $\delta = 0, \pi$ $(+\, n\, 2\pi)$

d) $\vec{E} = Z\,\vec{H}\times\vec{n} = Z\,H_0 \sin[\,\dots\,] \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

$(\delta = 0)$

Logo

$$\vec{E} = Z H_0 \sin[\ldots] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x - \frac{2}{\sqrt{2}} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z \right)$$

e portanto

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = Z H_0 \sin[\ldots] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x - \frac{2}{\sqrt{2}} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z \right)$$

$$= Z H_0 \sin[\ldots] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z \right) = 0$$

e) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = Z |\vec{H}|^2 \vec{n}$

$$\langle |\vec{S}| \rangle = Z \left(\langle |\vec{H}| \rangle^2 \right) =$$

$$= Z H_0^2 \left(3 \langle \sin^2[\ldots] \rangle \right) = \frac{3}{2} Z H_0^2$$

IV

a) usando a lei de Snell/Descartes

$$\boxed{n \sin i = n' \sin r}$$

obtemos sucessivamente

$$\begin{cases} \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2 \\ n_1 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \\ n_3 \sin\theta_3 = n_2 \sin\theta_4 \\ n_2 \sin\theta_4 = \sin\theta_1 \end{cases} \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_5$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_5}$$

Porque no intervalo $[0, \pi/2]$ o seno é uma função monótona crescente.

b) Do problema anterior resulta

$$n_1 \sin\theta_2 = n_2 \sin\theta_4$$

Da figura $\theta_2 > \theta_4 \Rightarrow \boxed{n_2 > n_1}$

c) $\theta_1 = \theta_5$. Na alínea a) n_3 pode ser $\forall$.

d)

$$T = (1-R_1)(1-R_1)(1-R_2)(1-R_2) = (1-R_1)^2(1-R_2)^2$$

transmitida 1ª superfície — transmitida 2ª sup. — transmitida 3ª sup. — transmitida 4ª superfície.

Logo

$$\boxed{T = (1-R_1)^2(1-R_2)^2}$$

V

$$-\frac{d}{dt}\int_V u_{em}\,dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

$\Downarrow$ T. Divergência

$$\boxed{-\frac{dU_{em}}{dt} = \int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,dS + \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV}$$

taxa de Diminuição de Energia no volume V

Energia que passa para fora do volume através da superfície por unidade de tempo

Trabalho realizado sobre as partículas carregadas por unidade de tempo (Efeito de Joule)

(Ver livro pg 159 para mais detalhes)