PROBLEMAS APÊNDICE A

A.1 Dada uma função $f(x, y, z)$,

a) calcule o seu gradiente $\vec{\nabla} f$;

b) mostre que $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$;

c) calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$.

A.2 Dado o vector

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \ ,$$

a) calcule o seu rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{A}$;

b) mostre que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.

A.3 Dado um vector $\vec{A}$, mostre que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \ .$$

A.4 Dados os vectores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, mostre que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ &+ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \ . \end{aligned}$$

A.5 Desenhe linhas de campo de um campo vectorial tal que:

a) o seu rotacional seja nulo;

b) a sua divergência seja nula.

A.6 Dado o vector de posição

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \ ,$$

mostre que o teorema da divergência se verifica, considerando para isso uma superfície esférica centrada na origem e de raio R.

A.7 Considere o vector $\vec{A} = 10/3x^3 \vec{e}_x$. Verifique o teorema da divergência, aplicando-o a um cubo de volume a^3, de arestas paralelas aos eixos e centrado na origem.

A.8 Dado o vector $\vec{A} = kr\,\vec{e}_r$, verifique o teorema da divergência no volume definido por duas superfícies esféricas concêntricas, de raios R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$).

A.9 Num redemoinho colocamos uma rolha de cortiça. Esta andará à roda em torno do centro do redemoinho. Fazendo as hipóteses simplificadoras que entender, deduza a relação entre a velocidade angular $\vec{\omega}$ e o $\vec{\nabla} \times \vec{v}$. Mostre que se obtém a mesma relação aplicando o teorema de Stokes. Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

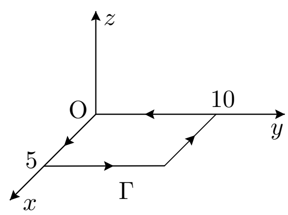
A.10 Seja o campo $\vec{A} = x\,\vec{e}_y$. Represente $\vec{A}$ graficamente e calcule o respectivo rotacional. Estará $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ligado a algum movimento de rotação?

A.11 Considere o vector

$$\vec{A} = xy\,\vec{e}_x - 2x\,\vec{e}_y$$

Verifique o teorema de Stokes sobre o quarto de círculo, de raio $r = 3$, situado no primeiro quadrante do plano (x, y)

A.12 Calcule a circulação do vector $\vec{A} = (2x + y)\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + xz\,\vec{e}_z$ em torno do rectângulo indicado na figura.



Verifique depois o teorema de Stokes.

PÁGINA 350 (PROPOSITADAMENTE EM BRANCO).