Problemas† Capítulo 1

Lei de Coulomb

***1.1** Considere uma barra estreita e comprida de comprimento L e com uma carga Q uniformemente distribuída.
a) Calcule a força exercida pela barra sobre uma carga igual a Q, situada a uma distância a de um extremo da barra, na direcção desta.
b) Considerando o sistema barra + carga Q em a, a que distância d, do extremo da barra, está o ponto P no qual o campo eléctrico é nulo?
c) Qual seria a posição de P, se o comprimento da barra aumentasse indefinidamente no sentido oposto ao da posição da carga q, mantendo-se a densidade de carga constante?
d) Qual seria a posição de P, se no processo da alínea c) se mantivesse a carga total Q constante?

***1.2** Use coordenadas cilíndricas para calcular o campo eléctrico devido a um disco de raio a, uniformemente carregado com uma densidade de carga σ, num ponto do eixo do disco a uma distância z do seu centro. Utilize este resultado para deduzir o campo devido a um plano infinito uniformemente carregado com a mesma densidade (σ).

***1.3** Considere uma espira circular de raio R carregada uniformemente com carga total Q. A espira encontra-se no plano xy, e no seu centro, coincidente com a origem das coordenadas, está colocada uma carga pontual $-Q$.
a) Determine o potencial electrostático num ponto P situado sobre o eixo z à distância z da origem.
b) Determine o campo eléctrico no ponto P.
c) Determine o potencial para pontos tais que $z \gg R$. Qual é o momento dipolar da distribuição?

***1.4** Considere um fio de comprimento 2 L uniformemente carregado com carga total Q. O fio encontra-se sobre o eixo x dum referencial cuja origem coincide com o ponto médio do fio.
a) Calcular o campo $\vec{E}$ num ponto P situado sobre o eixo z à distância z da origem.
b) Calcular $\vec{E}$ nos dos casos limites $z \ll L$ e $z \gg L$. Comente os resultados.

1.5 Temos uma coroa circular definida por dois círculos concêntricos de raios r_1 e r_2 e preenchida por uma carga uniforme de densidade σ. Calcular o campo eléctrico no centro do sistema e num ponto situado sobre o eixo do mesmo e à distância d do plano em que se encontram os círculos.

***1.6** Uma semiesfera de raio R encontra-se uniformemente electrizada em superfície, com uma densidade de carga σ. Calcular o campo eléctrico no centro da esfera.

***1.7** Sejam r e θ as coordenadas polares de um ponto no plano. Sejam a e b constantes. Considere nesse plano definido o potencial $V = a\cos\theta/r^2 + b/r$. Determine as componentes E_r e E_θ do campo.

***1.8** Sejam duas cargas iguais em módulo e de sinais opostos separadas de uma distância L. Considere o eixo do dipolo orientado segundo o eixo x, sendo a origem O deste eixo coincidente com o centro do dipolo.
a) Usando a expressão para o potencial de

---

† Indicamos com um asterisco os problemas cujas soluções (pelo menos para alguma das alíneas) se encontram no fim do livro.

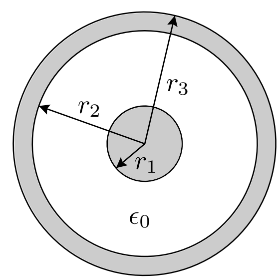
uma carga pontual, calcule o trabalho necessário para trazer uma carga $+Q$ do infinito até um ponto S sobre o eixo x, tal que $\overline{\mathrm{OS}} = x$.
b) Escreva uma expressão aproximada para o potencial em S, que seja válida para x muito maior que L.
c) Determine a orientação da superfície equipotencial no ponto S.
d) Determine uma superfície equipotencial que seja um plano e indique o valor do potencial nesse plano.
1.9 Temos uma esfera uniformemente carregada em superfície, com densidade σ, e um ponto P situado no seu interior. Mostrar que o campo eléctrico em P, $\vec{E}(\mathrm{P})$, é nulo, qualquer que seja a posição de P.

Lei de Gauss

***1.10** O espaço compreendido entre os dois planos infinitos e paralelos, definidos pela coordenadas $z = +a/2$ e $z = -a/2$, está preenchido uniformemente com uma carga de densidade em volume ρ. Calcular o campo electrostático num ponto P qualquer exterior à distribuição. Repetir para um ponto P$'$ interior à mesma.
***1.11** Uma carga Q está distribuída uniformemente com uma densidade ρ numa esfera de raio R. Determine as expressões do potencial ϕ e do campo $\vec{E}$ à distância r do centro da esfera, para pontos interiores e exteriores à esfera.
***1.12** Considere uma carga Q distribuída numa esfera de raio R com a densidade

$$\rho = A(R - r)\ (C/m^3), \quad 0 \leq r \leq R\ .$$

a) Determine a constante A em função de Q e R.
b) Calcule o campo eléctrico dentro e fora da esfera.
c) Verifique a continuidade do campo eléctrico sobre a superfície esférica.
d) Verifique a equação de Poisson.
1.13 Dois condutores esféricos, concêntricos, encontram-se aos potenciais ϕ_1 e ϕ_2.



Calcular:
a) a carga q_1 e a carga na superfície interna do condutor exterior, $q_{2\mathrm{int}}$;
b) o campo eléctrico e o potencial escalar no espaço entre os condutores;
c) o campo eléctrico e o potencial no exterior do sistema.
***1.14** Considere o átomo de hidrogénio no seu estado fundamental. Do ponto de vista electrostático pode ser considerado como uma carga pontual $+e$ colocada na origem, correspondente ao protão, e uma carga $-e$, correspondente ao electrão, distribuída de acordo com a densidade de carga

$$\rho_-(r) = A\ r^2 e^{-2r/r_0}\ ,$$

onde $r_0 = 0.53$ Å é o *raio de Bohr*.
a) Determine a constante A.
b) Calcule o campo eléctrico e o potencial electrostático desta distribuição de carga. Comente o resultado nos limites $r \ll r_0$ e $r \gg r_0$.

c) Determine a carga efectiva à distância $r = 4\,r_0$.
d) Verifique a equação de Poisson.
e) Qual o momento dipolar do átomo de hidrogénio?

***1.15** Uma esfera metálica de raio R está isolada de outros corpos. Exprima o potencial sobre a esfera, em função da sua carga. Determine o trabalho necessário para carregar a esfera até ao potencial V.

***1.16** Um condutor esférico de raio a possui uma carga Q. Este condutor está rodeado por uma superfície esférica condutora de raio b, ligada à terra através de uma bateria cuja diferença de potencial é V_1.
a) Determine a carga total sobre as superfícies interior e exterior da esfera de raio b.
b) Determine o campo e o potencial à distância r do centro das duas esferas, sendo $r \leq a$, $b \leq r$, $a \leq r \leq b$.

***1.17** Um cabo coaxial é constituído por dois condutores infinitos cuja secção transversal é uma circunferência de raio R_1 rodeada de uma coroa circular de espessura $R_3 - R_2$. Suponha que o condutor exterior está ligado à terra ($V = 0$) e que o interior está mantido ao potencial V.
a) Determine o potencial e o campo eléctrico no espaço entre os condutores.
b) Determine a carga por unidade de comprimento, λ, do condutor interior.
c) Determine a energia eléctrica por unidade de comprimento.

1.18 Temos dois condutores cilíndricos, coaxiais, de comprimento L muito grande e raios $R_1 < R_2$. O condutor interior está ligado à terra, e o exterior foi colocado a um potencial V. Calcular a densidade de carga, λ, no condutor interior.

Condutores e condensadores

1.19 Duas esferas condutoras de raios R_1 e R_2, têm uma distância r entre os respectivos centros, tal que $r \gg R_1, R_2$, de forma que podemos desprezar a influência eléctrica entre as esferas. Uma delas tem uma carga q, e a outra não tem carga. Liguemos as esferas por um fio condutor. Calcular a distribuição final das cargas, q_1 e q_2, e os potenciais ϕ_1 e ϕ_2.

***1.20** Considere dois cilindros coaxiais finitos, de comprimento L, cujas bases concêntricas têm raios R_1 e R_2, sendo R_2 o raio do cilindro exterior, que se encontra ao potencial zero. Suponha o cilindro interior carregado com uma dada carga. Calcule a capacidade do condensador assim definido.

***1.21** Considere um condensador plano de capacidade C, com uma distância d de separação entre as duas placas. Diga qual é a nova capacidade, quando se coloca uma placa metálica de espessura a entre as duas armaduras e equidistante destas.

1.22 Dois condensadores de capacidades C_1 e C_2, um carregado, outro não, são ligados em paralelo. Mostre que no equilíbrio se verificam as seguintes relações:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad \frac{Q_2}{Q} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \;,$$

onde Q é a carga inicial do condensador carregado e Q_1 e Q_2 as cargas finais de cada um deles.

1.23 Seja um condensador plano ligado a uma bateria de 12 V. A área das placas é A, sendo a distância entre elas de d. Descrever o que acontece à diferença de potencial entre as placas, ao campo eléctrico, à capacidade e à carga das placas, quando:
a) se afastam as placas para $2d$, mantendo o condensador ligado à bateria;

b) se afastam as placas para $2d$, com o condensador desligado da bateria.

1.24 Duas placas condutoras paralelas, de área A cada uma e distância d, estão ligadas a uma fonte que as mantém a uma diferença de potencial V. As placas são então lentamente aproximadas até ficarem a uma distância de $d/3$. A fonte é desligada e as placas gradualmente levadas à sua separação inicial d.
a) Qual é a diferença entre as energias electrostática final e inicial do sistema?
b) Chamemos x à distância entre as placas num determinado instante, sendo V a diferença de potencial entre elas. Calcular a variação da energia electrostática quando as placas são afastadas de uma distância Δx *(i)* mantendo a bateria ligada, *(ii)* com a bateria desligada. Qual a força que é necessário aplicar nos dois casos?

Dipolos e dieléctricos

***1.25** Considere um dipolo de momento dipolar $\vec{p} = q\,\vec{a}$, que faz um ângulo θ com a direcção de um campo eléctrico uniforme $\vec{E}$.
a) Calcule o momento da força que actua o dipolo.
b) Calcule o trabalho necessário para inverter a posição de equilíbrio do dipolo em presença do campo $\vec{E}$.
c) Considerando que o dipolo tem um momento de inércia I em relação ao seu centro, calcule o período de oscilação do dipolo, para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

1.26 Uma esfera condutora, de raio $r = a$ e carga $+q$, está envolvida por uma coroa dieléctrica concêntrica, de permitividade ϵ, ocupando a região limitada pelos raios $r = b$ e $r = c$. Desenhe o gráfico de $|\vec{D}|$, $|\vec{E}|$ e $|\vec{P}|$ em função de r.

***1.27** Considere o condensador do Problema 1.21. Suponha agora que a placa metálica é substituída por um dieléctrico de permitividade ϵ com a mesma espessura a da placa metálica. Calcule a capacidade deste novo condensador.

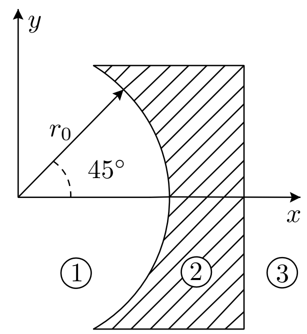
1.28 Dois condensadores planos com a mesma capacidade $C = \epsilon_0 A/d$ estão ligados em paralelo a uma bateria com uma tensão V entre os seus terminais. Considerar a sequência: *(i)* desligar os condensadores da bateria; *(ii)* introduzir num dos condensadores um dieléctrico de permitividade $\epsilon = \epsilon_r\,\epsilon_0$.
a) Qual é o valor final de Q_1 e Q_2?
b) Qual é o valor final da diferença de potencial?

1.29 Um condensador plano é carregado por uma bateria com uma carga Q. A bateria é então desligada. Vamos seguidamente introduzir entre as placas um dieléctrico de permitividade ϵ. Mostre que uma força aparece puxando o dieléctrico para dentro do condensador. Qual a sua expressão? A que é devida esta força?

***1.30** Considere dois condensadores com capacidade C ligados em paralelo a um potencial inicial V_1. Suponha que se introduz num deles um dieléctrico com permitividade $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Calcule o novo potencial a que ficam os condensadores, bem como a carga que vai fluir no circuito.

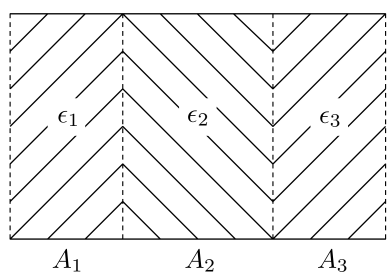
1.31 Uma carga $+Q$ foi colocada no centro de uma camada dieléctrica esférica de raios R_1 e R_2 com $R_2 > R_1$. A permitividade é ϵ. Determinar $\vec{E}$, ϕ, $\vec{D}$ e $\vec{P}$ como funções de r, distância ao centro, e fazer os respectivos gráficos.

1.32 Lentes dieléctricas podem ser usadas para colimar campos eléctricos. Na figura temos uma lente, cuja superfície da esquerda é cilíndrica, de eixo coincidente com o eixo z, e cuja superfície da direita é plana.



Se $\vec{E}_1$, no ponto indicado P$(r_0, 45°, z)$, na região 1, for dado por $\vec{E}_1 = 5\,\vec{e}_r - 3\,\vec{e}_\varphi$ (V/m), qual o valor que deverá ter a permitividade do dieléctrico 2, para que o campo $\vec{E}_3$, na região 3, seja paralelo ao eixo x?

1.33 Considere o condensador plano indicado na figura, onde a área das placas é dada por $A = A_1 + A_2 + A_3$.

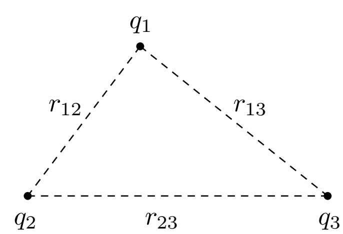


Calcule a distribuição σ_1, σ_2 e σ_3 das cargas sobre as placas do condensador, sabendo que os dieléctricos são caracterizados pelas permitividades $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ e $\epsilon_3 = \epsilon$. Qual a capacidade do condensador e a energia electrostática quando as placas estão a uma diferença de potencial V? Qual a relação entre os valores dos campos eléctricos nos três dieléctricos? Onde se distribuem as cargas de polarização e quais os seus valores? Existem cargas de polarização sobre as superfícies de separação dos dieléctricos? Porquê?

***1.34** Uma esfera de raio R encontra-se polarizada uniformemente, tendo o vector de polarização $\vec{P}$ a direcção do eixo z. Escreva a expressão para a carga superficial de polarização de um anel da superfície esférica cujo raio vector faça um ângulo θ com o eixo z. Obtenha, por integração, a carga positiva total de polarização. Qual é a carga total de polarização na superfície da esfera?

Energia

***1.35** Na figura temos três cargas pontuais, q_1, q_2 e q_3.



Qual o trabalho que temos de realizar para trocar as posições das cargas q_1 e q_2?

***1.36** Calcule a energia armazenada num sistema de quatro cargas pontuais idênticas, $Q = 4$ nC, situadas nos vértices de um quadrado de 1 m de lado. Qual é a energia armazenada no sistema quando só duas cargas estão colocadas e em vértices opostos?

***1.37** Considere o sistema de dois condensadores descrito no Problema 1.22. Mostre que a energia final armazenada no sistema é menor que a energia inicial e deduza uma expressão para a diferença entre as duas energias em termos de Q e de C_1 e C_2. Considere que o fio que liga os dois condensadores tem resistência R. Mostre que a diferença de energia é exactamente igual à energia dissipada por efeito de Joule, isto é,

$$U_\mathrm{J} = \int_0^\infty RI^2(t)\,dt \ .$$

Que acontece no caso em que R tende para zero?

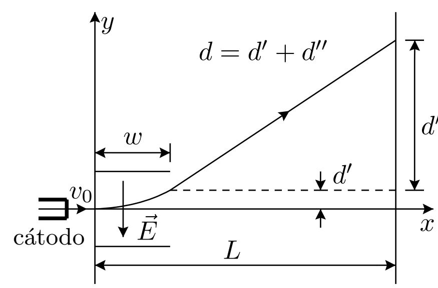
1.38 Uma esfera condutora de raio R, isolada e com carga Q, dilata-se lentamente sob a acção das forças electrostáticas, até atingir o raio R'. Calcule a variação da energia electrostática e, partindo desta expressão, calcule a expressão da força electrostática originando aquela expansão.

1.39 Considere uma camada esférica dieléctrica muito fina sobre a qual se encontra uniformemente distribuída uma carga $-Q$. Não existe, pois, qualquer campo interior. Coloquemos uma carga $+Q$ no centro da esfera. O campo exterior à esfera é agora nulo. Desloquemos a carga pontual $+Q$ de uma distância a inferior ao raio da esfera. Isto faz-se sem qualquer dispêndio de energia eléctrica. Contudo, no exterior da esfera dieléctrica, temos agora o aparecimento de um dipolo de momento $a\,Q$, o que origina no exterior um campo electrostático e a energia correspondente. Donde vem esta energia?

Cargas em movimento

***1.40** Determine a velocidade de um electrão que é acelerado através de uma diferença de potencial de 100 V.

***1.41** Na figura representa-se esquematicamente um osciloscópio de raios catódicos.



Os electrões saem do cátodo com uma velocidade v_0 (paralela ao eixo x), sofrendo depois uma deflexão pela acção do campo eléctrico E_d (paralelo ao eixo z e apontando para baixo), campo que actua ao longo do comprimento w das placas de deflexão. Calcular a deflexão total, $d = d' + d''$, sofrida pelos electrões ao embaterem no alvo situado em $x = L$.

Métodos numéricos

1.42 Considere a situação descrita no Exemplo 1.15, mas em que agora $\phi(x, d) = V_0$ com $V_0 = 100$ V.
a) Determine a solução exacta para o potencial.
b) Faça um programa (na linguagem que preferir) para calcular numericamente o potencial. Experimente com o tamanho da grelha e com o número de iterações.
c) Faça um programa para determinar as equipotenciais e as linhas de campo de $\vec{E}$. Represente-as graficamente.

1.43 Faça um programa (na linguagem que preferir) para calcular as linhas de campo e as equipotenciais dum sistema de N cargas. O programa deverá:
a) Tomar como entrada o número de cargas N, o valor das cargas q_i e a sua posição no plano $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$. Deverá ainda dar a opção

de decidir o número de linhas de campo e equipotenciais a calcular.
b) Calcular as linhas de campo e as equipotenciais.
c) Apresentar o resultado numa forma gráfica.

1.44 Faça um programa (na linguagem que preferir) para calcular equipotenciais e as linhas de campo a partir da função potencial. Considere só o problema no plano $z = 0$. O programa deverá:

a) Tomar como entrada a função $\phi(x, y)$ e desenhar as equipotenciais e as linhas de campo. Experimente com a solução do Exemplo 1.15.

b) Poder ter a possibilidade de o potencial ser dado por valores numa grelha de $N \times M$ pontos. Esta opção será particularmente útil para traçar as linhas de campo depois de resolver numericamente a equação de Laplace. Experimente com as soluções do Problema 1.42.