

Capítulo 3

Equações de Klein-Gordon e Dirac

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.3 do Griffiths [1] e as secções 1.2 a 1.5 de ITC [2]. Vamos no entanto usar o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$) discutido na aula anterior.

3.1 A equação de Klein-Gordon.

Começamos pela partícula livre. Em mecânica quântica não relativista a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \quad (3.1)$$

usando o Hamiltoniano livre não relativista que é

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (3.2)$$

e fazendo a substituição $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$. Obtemos então

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad (3.3)$$

A primeira ideia que surgiu para generalizar esta equação para uma partícula relativista foi usar em vez da Eq. (3.2) o Hamiltoniano relativista. Para uma partícula livre o Hamiltoniano é a sua energia e devemos ter

$$H = E \quad (3.4)$$

A energia está relacionada com o momento linear através da relação

$$p_\mu p^\mu = m^2 \quad (3.5)$$

onde

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) \quad (3.6)$$

Temos então

$$E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \quad (3.7)$$

ou seja

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (3.8)$$

Classicamente exige-se que as energias sejam positivas por isso deveríamos ter no caso relativista

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (3.9)$$

Somos imediatamente confrontados com o problema de interpretar a raiz quadrada dum operador. Para evitar este problema vamos encontrar uma equação para H^2 . Isto obtém-se facilmente iterando a Eq. (3.1) e observando que $[i \frac{\partial}{\partial t}, H] = 0$. Obtém-se então

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\vec{\nabla}^2 + m^2) \psi \quad (3.10)$$

ou ainda

$$[\square + m^2] \psi = 0 \quad (3.11)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Agora não temos dificuldades em interpretar os operadores mas introduzimos no problema as soluções de energia negativa que também são soluções da Eq. (3.11). Como veremos as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativista e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas. A observação experimental de antipartículas veio a confirmar esta interpretação.

Mas não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da Eq. (3.11), chamada equação de Klein-Gordon [6–8], como equação relativista para o eletrão mas antes outro problema relacionado com a *densidade* de probabilidade. Partindo da Eq. (3.11) e da equação complexa conjugada obtemos

$$\psi^* [\square + m^2] \psi - \psi [\square + m^2] \psi^* = 0 \quad (3.12)$$

ou

$$0 = \psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = \partial_\mu (\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi) \quad (3.13)$$

onde $\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi$. Temos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad ; \quad J^\mu = \psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \quad (3.14)$$

Na identificação usual $J^\mu = (\rho c, \vec{J})$ pelo que a densidade será

$$\rho = \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (3.15)$$

Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida positiva. Finalmente uma terceira razão fez abandonar a equação da Klein-Gordon. De facto ela não conduz aos níveis de energia do átomo de *hidrogénio* (ver Problema 3.3).

Se excetuarmos esta última razão, a Eq. (3.11) foi abandonada pelas razões erradas. De facto pode-se mostrar que ela é a boa equação relativista para partículas de *spin zero*, razão pela qual não pode explicar os níveis do átomo de hidrogénio onde os efeitos do spin são importantes. As soluções de energia negativa serão compreendidas e a densidade ρ será re-interpretada não como uma densidade de *probabilidade* mas antes como uma *densidade de carga*.

3.2 A equação de Dirac

Confrontado com os problemas anteriores Dirac propôs uma outra equação relativista para o eletrão [9, 10]. Como na equação fundamental, Eq. (3.1), a derivada em ordem ao tempo aparece linearmente é natural admitir num contexto relativista que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em ordem às coordenadas e portanto escrevemos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi \equiv H \psi \quad (3.16)$$

É fácil de ver que α^i e β não podem ser números pois então a relação entre energia e momento duma partícula relativista não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^* \psi$ é para ser interpretada como a componente temporal dum 4-vetor corrente. Assim Dirac propôs que $\vec{\alpha}$ e β sejam matrizes hermiticas $N \times N$ (para que H seja hermitico) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A Eq. (3.16) é então interpretada como uma equação matricial. Para que ela faça sentido devemos satisfazer as condições:

- Deve dar a relação correta entre a energia e o momento isto é $E^2 = p^2 + m^2$, para uma partícula livre.
- Deve fornecer uma probabilidade definida positiva.
- Deve ser covariante para transformações de Lorentz.

Vejam os dois primeiros requisitos. Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein Gordon. Para isso iteramos a Eq. (3.16)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (-i \alpha^i \nabla_i + \beta m) i \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \left[-\frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \nabla_i \nabla_j - i m (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \nabla_i + \beta^2 m^2 \right] \psi \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para que cada componente satisfaça a equação de Klein-Gordon devemos ter

$$\begin{cases} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Complemento 3.1

Na Eq. (3.18), que conduziu às relações anteriores, simetrizámos o produto $\alpha^i \alpha^j$. Como este tipo de situação vai aparecer várias vezes, expliquemos um pouco mais. Tomemos como exemplo o espaço euclidiano a 3 dimensões com métrica δ_{ij} , mas os resultados são independentes desta hipótese. Seja T_{ij} um tensor de segunda ordem neste espaço (o que quer dizer que se transforma como as coordenadas em cada um dos seus índices), $A_{ij} = -A_{ji}$ um tensor anti-simétrico e $S_{ij} = S_{ji}$ um tensor simétrico. Então

$$\begin{aligned} A_{ij} S_{ij} &= A_{12} S_{12} + A_{21} S_{21} + \dots \\ &= A_{12} S_{12} - A_{12} S_{12} + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

pois é sempre possível rearranjar os termos para se cancelarem dois a dois. Dizemos que a *contração dum tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é sempre nula*. Por outro lado, um tensor sem simetria definida, pode ser sempre decomposto nas suas partes simétrica e anti-simétrica, isto é,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \\ &= T_{ij}^S + T_{ij}^A \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então obtemos facilmente

$$T_{ij} A_{ij} = T_{ij}^A A_{ij} \quad ; \quad T_{ij} S_{ij} = T_{ij}^S S_{ij} \quad (3.22)$$

Temos portanto que construir 4 matrizes que *anticomutem*, sejam *hermíticas* e cujo *quadrado* seja a *identidade*. É desde logo claro que não podem ser 2×2

pois só há 3 matrizes 2×2 que anticomutam, as matrizes de Pauli. Para ver a dimensão mínima em que é possível realizá-las, observemos que sendo hermiticas os seus valores próprios são reais e iguais a ± 1 pois $\alpha^{i2} = \beta^2 = 1$. Das relações de anticomutação pode-se concluir que têm traço nulo. Por exemplo

$$\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta \quad (3.23)$$

ou seja

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta\alpha^i\beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0 \quad (3.24)$$

Isto tem como consequência que N deve ser par para que o número de valores próprios $+1$ e -1 seja igual. Como $N = 2$ está excluído devemos ter $N = 4$ como a dimensão mais baixa onde se realiza a Eq. (3.19). Uma representação explicita, a chamada *representação de Dirac* é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

É um exercício trivial verificar que a Eq. (3.25) satisfaz as condições da Eq. (3.19). Claro que a escolha não é *única*, mas voltaremos a este assunto mais tarde.

Vamos agora ver a questão da corrente de probabilidade. Para isso escrevemos a equação conjugada hermitica da Eq. (3.16). Atendendo a que α^i e β são hermiticas, obtemos

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger (i \alpha^i \overleftarrow{\partial}_i + \beta m) \quad (3.27)$$

Multiplicando a Eq. (3.16) à esquerda por ψ^\dagger e a Eq. (3.27) à direita por ψ e subtraindo obtemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i \nabla_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi) \quad (3.28)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = 0 \quad (3.29)$$

o que permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad (3.30)$$

$$\vec{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \quad (3.31)$$

Integrando a Eq. (3.29) em todo o espaço obtemos

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0 \quad (3.32)$$

o que está de acordo com identificarmos $\psi^\dagger \psi$ como uma densidade de probabilidade definida positiva.

A notação das Eq. (3.29) e (3.31) antecipa o facto de \vec{j} ser um 3-vetor. De facto temos de mostrar isso e muito mais. Na secção seguinte demonstraremos que $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ é um 4-vetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é *covariante*, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

Antes de continuar a discutir a equação de Dirac vamos introduzir uma conveniente notação 4-dimensional. Multiplicamos a Eq. (3.16) por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzimos as matrizes

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad ; \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.33)$$

Então a equação de Dirac escreve-se

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (3.34)$$

ou ainda

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad (3.35)$$

onde se introduziu a notação, devida a Feynman

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad (3.36)$$

As matrizes γ^μ , na representação de Dirac, são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

É fácil de ver que as relações da Eq. (3.19) se escrevem numa forma compacta em termos das matrizes γ , isto é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (3.38)$$

3.3 Spin e a equação de Dirac

Em mecânica quântica uma observável é conservada se comutar com o Hamiltoniano do sistema. Por exemplo, em mecânica não relativista o Hamiltoniano para a

partícula livre (equação de Schrödinger),

$$H_S = \frac{p^2}{2m} \quad (3.39)$$

comuta com o operador momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e portanto o momento angular é conservado. A questão que se põe agora é saber o que acontece em mecânica quântica relativista para o Hamiltoniano de Dirac,

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (3.40)$$

Vamos calcular este comutador. Isto faz-se mais facilmente se usarmos as expressões com índices em vez de vectores. Como se trata de índices do espaço vamos usar os índices i, j, k, \dots . Obtemos

$$[H_D, L^i] = [\alpha^j p^j, L^i] \quad (3.41)$$

porque no espaço de Dirac, L^i é proporcional à matriz identidade que comuta com a matriz constante β . Usando agora $L^i = \epsilon^{ikm} x^k p^m$, obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} [H_D, L^i] &= \epsilon^{ikm} [\alpha^j p^j, x^k p^m] \\ &= \epsilon^{ikm} \alpha^j [p^j, x^k] p^m \\ &= -i \epsilon^{ikm} \alpha^k p^m = -i (\vec{\alpha} \times \vec{p})^i \end{aligned} \quad (3.42)$$

isto é, o momento angular não comuta com o Hamiltoniano de Dirac,

$$[H_D, \vec{L}] = -i \vec{\alpha} \times \vec{p} \quad (3.43)$$

e não é portanto uma quantidade conservada, mesmo para a partícula livre.

Se pensarmos um pouco isto não devia ser uma surpresa, pois do estudo do átomo de hidrogénio em mecânica quântica não relativista sabemos que o electrão tem spin e é o momento angular total que é conservado. Em mecânica quântica não relativista o operador de spin é dado por ($\hbar = 1$),

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}. \quad (3.44)$$

Como os spinores de Dirac têm quatro componentes, vamos generalizar este operador para

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

e vamos ver quais as relações de comutação deste operador com H_D . Como $\vec{\Sigma}$ é diagonal comuta com a matriz também diagonal¹ β , portanto temos só de ver as relações de comutação com as matrizes α^i . Obtemos

$$[\alpha^i, \Sigma^j] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

¹Estamos a considerar a representação de Dirac, claro.

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \\ [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2i\epsilon^{ijk} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

e portanto

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\Sigma}] = 2i\vec{\alpha} \times \vec{p} \tag{3.47}$$

onde usámos $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$. Usando os resultados das Eqs. (7.18) e (7.22) podemos definir o momento angular total,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \tag{3.48}$$

que satisfaz,

$$[H_D, \vec{J}] = 0 \tag{3.49}$$

e portanto o momento angular total é conservado. Usando a Eq. (7.21) e as propriedades das matrizes de Pauli podemos facilmente mostrar que

$$S^2 = \frac{1}{4}\Sigma^2 = \frac{3}{4} \tag{3.50}$$

o que mostra que o electrão tem $s = 1/2$.

3.4 Soluções para a partícula livre

3.4.1 Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

Tomemos a equação de Dirac para a partícula livre ($\hbar = c = 1$)

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0 \tag{3.51}$$

A Eq. (3.51) admite como soluções ondas planas

$$\psi(x) = w(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \tag{3.52}$$

desde que $p_\mu p^\mu = m^2$. Isto implica que $(p^0)^2 = E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2$, e portanto temos soluções com energia positiva e negativa. Nas nossas convenções fazemos $p^0 = E/c = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} > 0$ sempre, pelo que devemos ter

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p})e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^\mu} \tag{3.53}$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$ para soluções de energia positiva e negativa, respetivamente, e o índice r explicita as diferentes soluções independentes, como veremos de seguida.

Para determinar $w^r(\vec{p})$ vamos considerar primeiro o caso da partícula em repouso. No referencial próprio a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - m\right)\psi = 0 \quad (3.54)$$

Usando a representação de Dirac, Eq. (3.37), é fácil de ver que a equação se escreve

$$m(\varepsilon_r\gamma^0 - 1)\psi^r = 0 \quad (3.55)$$

onde

$$\psi^r = w^r(0)e^{-i\varepsilon_r mt} \quad (3.56)$$

com

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases} \quad (3.57)$$

e

$$w^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^{(2)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$w^{(3)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^{(4)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Vemos portanto que $r = 1, 2$ são soluções da energia *positiva* e $r = 3, 4$ da energia *negativa*. O factor $\sqrt{2m}$ da normalização foi introduzido por conveniência como será claro mais tarde (esta normalização é a nossa *única* diferença em relação às convenções de Bjorken e Drell). Se usarmos o operador

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

vemos ainda que $w^{(r)}(0)$ são funções próprias de Σ^3 com valores próprios ± 1 . Assim as soluções $r = 1, 2$ descrevem o eletrão de *Schrödinger-Pauli* e as soluções de energia negativa, $r = 3, 4$ serão interpretadas mais tarde. Na re-interpretação de Dirac das soluções de energia negativa como as anti-partículas, a ausência de um eletrão de energia negativa com spin CP corresponde a um positrão com spin down, por isso $w^{(3)}(0)$ corresponderá a spin down enquanto que $w^{(4)}(0)$ a spin up.

3.4.2 Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

Se tivéssemos visto como os spinores se transformam numa transformação de Lorentz, poderíamos aqui fazer simplesmente uma mudança de referencial. Voltaremos a este

assunto na secção seguinte, mas sem demonstração, pelo que aqui vamos construir as soluções para $\vec{p} \neq 0$ diretamente seguindo de perto o Griffiths. Queremos soluções da forma

$$\psi(x) = N w(k) e^{-i k \cdot x} \quad (3.61)$$

onde N é uma normalização a determinar no final. Substituindo na Eq. (3.51) obtemos

$$(\gamma \cdot k - m)w(p) = (\not{k} - m)w(k) = 0 \quad (3.62)$$

onde usámos a notação, devida a Feynman,

$$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu \equiv \gamma \cdot k = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \quad (3.63)$$

Comecemos por notar que a Eq. (3.62) é uma equação algébrica matricial. Na representação de Dirac temos

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} k^0 & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

pelo que escrevendo o 4-spinor w em termos de dois bi-spinores,

$$w(p) = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

obtemos

$$(\not{k} - m)w = \begin{bmatrix} k^0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$= \begin{bmatrix} (k^0 - m)w_A & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_B \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_A & -(k^0 + m)w_B \end{bmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

Estas equações conduzem às relações,

$$w_A = \frac{1}{k^0 - m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_B, \quad w_B = \frac{1}{k^0 + m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_A, \quad (3.68)$$

A consistência requer então que

$$w_A = \frac{1}{(k^0)^2 - m^2} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 w_A \quad (3.69)$$

Mas usando $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$, concluímos que deve ser

$$|\vec{k}|^2 = (k^0)^2 - m^2, \quad (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2 \quad (3.70)$$

Exemplo 3.1 Mostremos que $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$. Para isso usamos a propriedade das matrizes de Pauli,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.71)$$

para obter

$$(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = |\vec{k}|^2 \quad (3.72)$$

onde no último passo usamos o facto de a contração dum tensor simétrico com um anti-simétrico se anular.

Portanto k^μ deve ser um quadri-vetor relacionado com o 4-momento da partícula por

$$k^\mu = \pm p^\mu \quad (3.73)$$

correspondendo o sinal + às soluções de energia positiva, as partículas e o sinal – às soluções de energia negativa, as anti-partículas.

Podemos agora construir 4 soluções independentes da equação de Dirac. De facto

1. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então ($E = p^0$)

$$w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

2. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

3. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

4. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Com a normalização canónica,

$$w^\dagger w = 2E \quad (3.78)$$

obtemos finalmente as quatro soluções independentes,

$$u^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}, u^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

e

$$v^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

onde usámos a notação convencional, u para as partículas e v para as anti-partículas. Notar que devido aos sinais na Eq. (3.73), as equações para u e v diferem dum sinal (ver Eq. (3.62))

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (\not{p} + m)v = 0. \quad (3.81)$$

3.5 Covariância da equação de Dirac

3.5.1 Transformações de spinores

Escrevemos a equação de Dirac na forma,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (3.82)$$

sem nunca nos preocuparmos em que referencial estamos. A razão é que estamos implicitamente a usar o facto de que deve ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia, isto é no referencial S' deverá ser

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (3.83)$$

Numa transformação geral entre S e S' definida através das transformações,

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3.84)$$

um escalar fica invariante $\phi'(x') = \phi(x)$, mas um vetor muda como as coordenadas,

$$A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (3.85)$$

A questão é saber como se transformam os spinores nas transformações da Eq. (3.84). Não vamos explicar esta questão aqui (ver a Ref. [2]) mas só dar o resultado. Se definirmos

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x) \quad (3.86)$$

então a equação de Dirac é covariante se

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \quad (3.87)$$

A forma explícita depende do tipo de transformações de Lorentz. Assim

1. Rotações

$$S_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} \quad (3.88)$$

onde $\vec{\theta}$ é um vetor coma direção da rotação e módulo igual ao ângulo de rotação e

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Notar que em cada bloco diagonal os spinores transforma-se como em mecânica quântica não relativista.

2. Transformações de Lorentz (boosts)

$$S_L = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\alpha}} \quad (3.90)$$

onde $\vec{\alpha}$ são as matrizes de Dirac, e $\vec{\omega}$ é um vetor na direção da velocidade relativa entre S e S' tal que

$$\tanh \omega = \frac{|\vec{V}|}{c} \quad (3.91)$$

3. Inversão no espaço (Paridade)

Neste caso

$$a^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

e portanto a Eq. (3.87), dá

$$S_P = \gamma_0 . \quad (3.93)$$

3.5.2 Adjunto de Dirac

A escolha mais simplista para formar um invariante seria $\psi^\dagger\psi$. Contudo esta quantidade não é um escalar mas sim a componente temporal dum 4-vetor, como vimos na discussão da corrente de probabilidade. Como formar então um escalar? Para isso notemos, que

$$S_L^\dagger = S_L \neq S_L^{-1} \rightarrow \psi'^\dagger\psi' \neq \psi^\dagger\psi \quad (3.94)$$

contudo podemos mostrar que para todas as transformações de Lorentz devemos ter

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 \quad (3.95)$$

Por isso se definirmos o chamado **adjunto de Dirac**

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0 \quad (3.96)$$

então temos

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1} \quad (3.97)$$

e portanto

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi \quad (3.98)$$

e é portanto um escalar, invariante para **todos** os tipos de transformações de Lorentz.

3.5.3 Covariantes bilineares

Tal como qualquer matriz complexa 2×2 se pode exprimir em termos de 4 matrizes linearmente independentes (por exemplo a matriz identidade mais as matrizes de Pauli) assim qualquer matriz 4×4 se pode exprimir em termos de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes. Para introduzir estas matrizes é conveniente definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.99)$$

que na representação de Dirac tem a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

Da definição resultam as propriedades importantes

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (3.101)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (3.102)$$

Estamos agora em posição de definir as 16 matrizes 4×4

$$\Gamma^S = 1 \quad (3.103)$$

$$\Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad (3.104)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (3.105)$$

$$\Gamma_\mu^A \equiv \gamma_5\gamma_\mu \quad (3.106)$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \quad (3.107)$$

onde os símbolos S , V , T , A e P designam respetivamente: escalar, sector, tensor, pseudo sector e pseudo-escalar e têm a ver com a maneira como os bilineares

$$\bar{\psi} \Gamma^a \psi \quad a = S, V, T, A \text{ e } P \quad (3.108)$$

se transformam para transformações de Lorentz. Por exemplo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') \Gamma^A \psi'(x') &= \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu S \psi(x) \\ &= \det a \, a^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x) \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde se usou o facto de $[S, \gamma_5] = 0$ para transformações de Lorentz próprias e $\{\mathcal{P}, \gamma_5\} = 0$ para a inversão no espaço. Isto mostra que $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)$ se transforma como um sector axial ou pseudo-sector. De forma semelhante se podiam demonstrar as propriedades de transformação dos outros bilineares.

3.6 Antipartículas

Apesar de todos os sucessos da equação de Dirac descritas anteriormente o problema das soluções com energia negativa continua por resolver. Este problema não é um problema académico, pois é preciso explicar porque é que os electrões nos átomos não efectuam transição para estados de energia negativa. Por exemplo um cálculo simples dá para o electrão, no estado fundamental do hidrogénio, uma taxa de transição de 10^8 s^{-1} para decair no intervalo $[-mc^2, -2mc^2]$

3.6.1 A teoria dos buracos de Dirac.

Foi Dirac quem primeiro forneceu um tratamento consistente das soluções de energia negativa. O argumento de Dirac só funciona para fermiões pois faz uso do *Princípio de Exclusão de Pauli*. Assim para Dirac o *vácuo* da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidas. Devido ao princípio de exclusão de Pauli um electrão com energia $E > 0$ não pode então efectuar uma transição para um estado de energia negativa, explicando a estabilidade dos átomos. Claro que o vácuo tem energia e momento infinitos mas fisicamente só medimos diferenças em relação ao vácuo e essas serão finitas.

A principal consequência desta interpretação é a existência de antipartículas, neste caso o positrão. Consideremos que o vácuo tem uma lacuna ou buraco. Isto quer dizer a *ausência* dum electrão de energia $-E$ e carga $-|e|$. Mas isto pode ser igualmente interpretado como *presença* dum partícula de carga $+|e|$ a energia

positiva $+E$, isto é, o positrão. Assim a produção dum par electrão-positrão é explicada esquematicamente na Figura 3.1

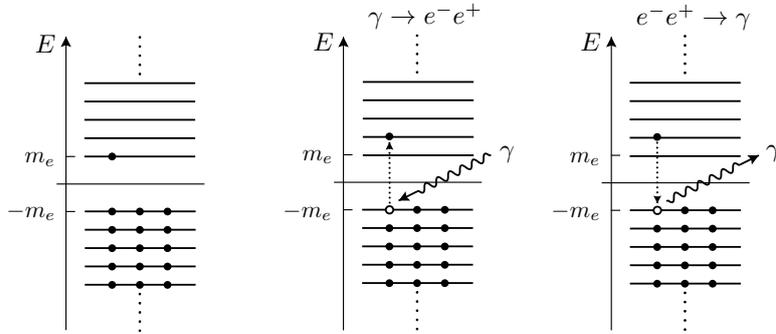


Figura 3.1: Esquema do mar de Dirac. Produção e aniquilação de pares.

Isto é, um electrão é excitado dum estado de energia negativa deixando atrás de si uma lacuna no mar de Dirac. Como esta lacuna corresponde a um positrão ficou criado um par e^+e^- . Igualmente a aniquilação electrão-positrão pode ser interpretada como um electrão com $E > 0$ que faz uma transição para um estado com $E < 0$ que estava livre (positrão) desaparecendo portanto o electrão e o positrão, conforme indicado na Figura 3.1

Com a teoria dos buracos abandonamos a interpretação em termos de funções de onda de uma partícula para passar a ser uma explicação em termo de muitas partículas. Só o formalismo da segunda quantificação, com os seus operadores de criação e destruição permitirá fazer uma descrição consistente desta teoria de muitas partículas. Essa explicação, como veremos, também se aplicará aos bósons, o que a este nível não é possível de explicar por não satisfazerem ao princípio de exclusão de Pauli. Contudo a interpretação de Dirac teve um papel determinante no desenvolvimento da teoria e a descoberta experimental das antipartículas foi um grande sucesso.

3.6.2 A interpretação de Feynman-Stückelberg

A interpretação moderna das soluções de energia negativa foi desenvolvida por Stückelberg e Feynman no contexto de teoria quântica dos campos. As partículas de energia negativa ($E < 0$) são interpretadas como partículas de energia negativa que se propagam para trás no tempo. Estas partículas de energia negativa correspondem a antipartículas de energia positiva que se propagam para o futuro. A dependência no tempo das funções de onda não virá alterada por esta dupla transformação, $E \rightarrow -E$ e $t \rightarrow -t$, isto é

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)} \quad (3.110)$$

Para ilustrar esta ideia consideremos os diagrama da Fig. 3.2. No diagrama da esquerda um electrão de energia E emite um fóton de energia $2E$ e para conservar

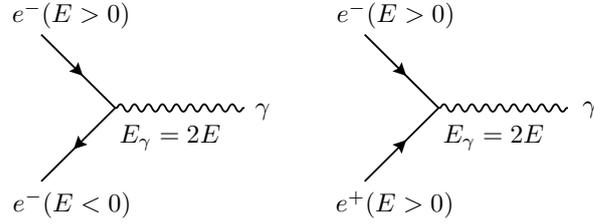


Figura 3.2: Equivalência entre electrões de energia negativa e positrões de energia positiva.

energia um electrão de energia $-E$. Sendo uma solução de energia negativa propaga-se para trás no tempo. Na interpretação de Feynman-Stückelberg, no diagrama da direita, um positrão de energia $E > 0$ aniquila-se com um electrão de energia $E > 0$ para produzir um fóton de energia $2E$. Nesta interpretação tanto a partícula como a antipartícula se propagam para o futuro. Notar no entanto que nos diagramas de Feynman as antipartículas são desenhadas com a seta para trás no tempo, como no diagrama do lado esquerdo. Voltaremos a esta questão no próximo capítulo.

3.6.3 Conjugação de carga

Da teoria dos buracos emerge assim numa nova simetria de natureza: para cada partícula existe uma antipartícula. Esta simetria designa-se por *conjugação de carga*. Vejamos como a podemos definir. De acordo com a teoria dos buracos devemos ter uma correspondência unívoca entre as soluções de energia negativa da equação de Dirac para os electrões

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0 \quad (3.111)$$

e as soluções de energia positiva da equação de Dirac para os positrões,

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)\psi_c = 0 \quad (3.112)$$

onde ψ_c é a função de onda para o positrão. Para encontrar a relação observemos que o sinal relativo entre $i\cancel{\partial}$ e $e\cancel{A}$ é o contrário nas duas equações. Isso leva-nos a considerar o complexo conjugado da Eq. (3.111). Obtemos

$$(-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu - e\gamma^{\mu*} A_\mu - m)\psi^* = 0 \quad (3.113)$$

Usando agora $\gamma^{0T}\psi^* = \bar{\psi}^T$ e $\gamma^{0T}\gamma^{\mu*}\gamma^{0T} = \gamma^{\mu T}$ obtemos

$$[-\gamma^{\mu T}(+i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0 \quad (3.114)$$

Se encontrarmos uma matriz C , não singular, tal que

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (3.115)$$

podemos então identificar (a menos duma fase que tomamos igual a 1)

$$\psi_c \equiv C\bar{\psi}^T \quad (3.116)$$

Que existe uma matriz C verificando a Eq. (3.115) pode ser demonstrado construindo um exemplo específico. Na representação de Dirac é

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \quad (3.117)$$

ou mais explicitamente

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

É instrutivo ver como é que a Eq. (3.116) relaciona as soluções de energia negativa com as funções de onda do positrão. Consideremos um electrão de energia negativa em repouso com spin para baixo. Então

$$\psi = N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \quad (3.119)$$

onde N é uma renormalização. Aplicando a Eq. (3.116) obtemos

$$\psi_c = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \quad (3.120)$$

isto é, um positrão de energia positiva e spin para cima. Portanto a *ausência* dum electrão de spin \downarrow e energia negativa corresponde à *presença* dum positrão de energia positiva e spin \uparrow . Foi este facto que nos levou a identificar $v(p, \uparrow)$ com $w^4(\vec{p})$ e $v(p, \downarrow)$ com $w^3(\vec{p})$.

3.7 Spin e helicidade

Para partículas no referencial próprio, os spinores $u((E, \vec{0}), s)$ e $v((E, \vec{0}), s)$, são estados próprios do operador S_z ,

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

Isto deixa de ser verdade quando $\vec{p} \neq 0$. No entanto, para o caso particular do momento linear ser segundo o eixo dos z , essa situação ainda se mantém. De facto se $\vec{p} = \pm|\vec{p}|\vec{e}_z$, obtemos das Eqs. (3.79) e (3.80),

$$u_{\uparrow} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix}, u_{\downarrow} = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \end{bmatrix}, v_{\uparrow} = N \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{\downarrow} = N \begin{bmatrix} \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} S_z u_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= +\frac{1}{2}u_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z u_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -\frac{1}{2}u_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z^{(v)} v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -S_z v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) = +\frac{1}{2}v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z^{(v)} v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -S_z v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) = -\frac{1}{2}v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Portanto para uma partícula com momento $\vec{p} = (0, 0, \pm|\vec{p}|)$ os spinores $u_{\uparrow}, v_{\uparrow}$ correspondem a spin up e os spinores $u_{\downarrow}, v_{\downarrow}$ a spin down, conforme indicado na Fig. 3.3.

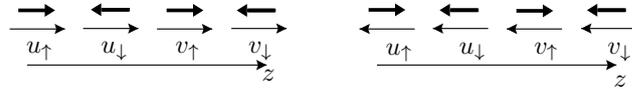


Figura 3.3: Spinores e spins para movimento segundo $\pm\vec{e}_z$.

3.7.1 Helicidade

As propriedades dos spinores para movimento segundo o eixo dos z descritas acima não são particularmente úteis nas aplicações, pois nem as partículas resultantes das colisões vão segundo o eixo dos z , nem as soluções anteriores fornecem uma base em que expandir os estados pois $[H_D, S_z] \neq 0$, e portanto não é possível definir uma base simultânea de H_D e S_z .

A base mais conveniente leva-nos ao conceito de helicidade. A helicidade é definida como a projecção do spin na direcção do movimento, isto é

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (3.124)$$

É fácil de mostrar que $[H_D, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = 0$ e que portanto h comuta com o Hamiltoniano livre de Dirac. Como o spin medido segundo qualquer eixo está quantizado e só pode tomar os valores $\pm\frac{1}{2}$, os valores próprios da helicidade são também $\pm\frac{1}{2}$. Designamos



Figura 3.4: Estados próprios da helicidade para spin 1/2.

estes estados por \uparrow ou RH para $h = +\frac{1}{2}$ e \downarrow ou LR para $h = -\frac{1}{2}$, conforme indicado na Fig. 3.4. Notar que o conceito de helicidade não é invariante de Lorentz pois, para partículas com massa, é sempre possível ir para um referencial onde se muda o sentido do momento. Já o conceito de quiralidade que, como veremos, está relacionado é invariante de Lorentz. Preferimos a notação \uparrow, \downarrow , para não confundir com os estados próprios da quiralidade que veremos depois.

3.7.2 Spinores de helicidade

Para as aplicações é útil ter uma representação explícita dos spinores de helicidade. Começemos pelos spinores u para as soluções de energia positiva. Queremos resolver a equação aos valores próprios,

$$h u = \lambda u . \quad (3.125)$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} , \quad (3.126)$$

donde resulta

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = 2|\vec{p}|\lambda u_A, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = 2|\vec{p}|\lambda u_B . \quad (3.127)$$

Usando agora $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$, obtemos,

$$|\vec{p}|^2 = 2|\vec{p}|\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = 4|\vec{p}|^2\lambda^2 , \quad (3.128)$$

donde resulta $\lambda = \pm 1/2$ como era de esperar. Vamos agora encontrar os vectores próprios correspondentes a estes valores próprios. Basta encontrar u_A pois usando a equação de Dirac, $(\not{p} - m)u = 0$ obtemos,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B , \quad (3.129)$$

e usando agora a Eq. (9.80) obtemos

$$u_B = 2\lambda \frac{|\vec{p}|}{E + m} u_A . \quad (3.130)$$

Para encontrar u_A escrevemos

$$\vec{p} \equiv |\vec{p}| \vec{n}, \quad \vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (3.131)$$

e então encontrar os valores próprios da Eq. (9.80), é equivalente a encontrar os valores próprios de

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Este é um problema bem conhecido do spin em mecânica quântica não relativista com o resultado,

$$u_{A\uparrow} = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{A\downarrow} = \begin{bmatrix} -\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.133)$$

onde os vectores estão normalizados e escolhemos as fases globais de tal forma que no limite $\theta \rightarrow 0$ recuperamos os resultados da Eq. (7.12). Pondo tudo junto obtemos para os spinores u ,

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} -\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Os estados próprios de v obtêm-se de forma idêntica, não esquecendo que $\vec{S}^{(v)} = -\vec{S}$, e portanto

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{2|\vec{p}|} v_{\uparrow} = -\frac{1}{2} v_{\uparrow}. \quad (3.135)$$

O resultado final é

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ -\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Quando estudarmos as colisões em QED, voltaremos a este assunto e mostraremos a sua utilidade nas aplicações.

Problemas capítulo 3

3.1 Mostre que a construção usual da corrente de probabilidade aplicada à equação de Schrödinger conduz à densidade de probabilidade usual $|\psi|^2$ definida positiva. Compare com a Eq. (3.12) e discuta a origem da diferença entre os dois casos.

3.2 Considere o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A partir deste tensor define-se o chamado *tensor dual*

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} .$$

a) Mostre que as equações de Maxwell são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

e que estas reproduzem as leis de Gauss e Ampère (incluindo a corrente de deslocamento introduzida por Maxwell).

b) Mostre que se tem

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

Verifique que esta equação contém as chamadas equações de Maxwell homogêneas, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$. Verifique que aquela relação é equivalente à forma mais usual (identidade de Bianchi)

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

c) Exprima os invariantes $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} .

d) Mostre que se \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares num dado referencial, então são perpendiculares em todos os referenciais de inércia.

e) Considere um referencial S onde se tem $\vec{E} \neq 0$ e $\vec{B} = 0$. Será possível encontrar um referencial S' onde $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$? Justifique.

3.3 Introduza na equação de Klein-Gordon o acoplamento mínimo

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu$$

e considere as soluções estacionárias do átomo de hidrogénio, isto é ($\hbar = c = 1$)

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt} \quad ; \quad A_0 = -\frac{e}{4\pi r}$$

a) Mostre que a equação de Klein-Gordon se escreve

$$\left[-\nabla^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \phi(\vec{r}) = 0$$

b) Mostre que esta equação se pode resolver exatamente pelos métodos usuais dando as energias

$$E_{n\ell} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n-\varepsilon_\ell)^2}}} \quad ; \quad \begin{cases} n & = 1, 2, \dots \\ \ell & = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde

$$\varepsilon_\ell = \ell + \frac{1}{2} - \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{1/2}$$

c) Expandindo em potências de α compare com os resultados da teoria de Schrödinger incluindo correções relativistas.

3.4 Utilize as expressões explícitas

$$S_R = \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\theta} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$S_L = \cosh \frac{\omega}{2} - \hat{\omega} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{\omega}{2}$$

para verificar que para transformações finitas também temos

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

3.5 Considere um eletrão incidente da região I com energia E conforme indicado na Figura 3.5. Admita que a partícula incidente tem a função de onda

$$\psi_{\text{inc}} = a e^{ik_1 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_1}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

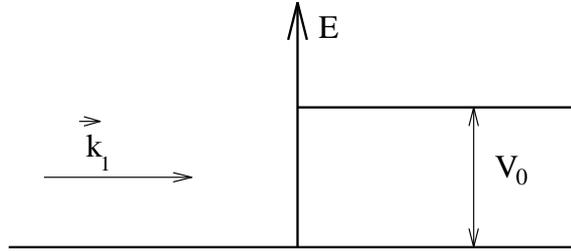


Figura 3.5: Paradoxo de Klein

- a) Calcule a onda defletida e a onda transmitida.
 b) Mostre que a corrente defletida e transmitida obedecem a

$$\frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad ; \quad \frac{J_{\text{refl}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

isto é, aparentemente tudo bem pois

$$J_{\text{inc}} = J_{\text{trans}} + J_{\text{refl}}$$

contudo

$$r = \frac{k_2}{k_1} \frac{E+m}{E-V_0+m} \quad \text{e se} \quad V_0 > E+m \quad \text{então} \quad r < 0$$

Portanto

$$J_{\text{ref}} > J_{\text{inc}}$$

Comente este resultado.

3.6

- a) Construa o Hamiltoniano H da equação de Dirac para partículas livres no espaço dos momentos.
 b) Calcule o comutador $[H, \vec{L}]$, onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular orbital.
 c) Calcule o comutador $[H, \vec{S}]$, onde $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ é o momento angular intrínseco ou spin.
 d) Use os resultados anteriores para calcular $[H, \vec{J}]$, onde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Comente.

3.7 Considere um elétron descrito pela equação de Dirac.

a) Mostre que no caso do elétron livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{dt} = 0$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

b) Considere agora que o elétron está num campo eletromagnético exterior A^μ , independente do tempo. Calcule agora

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt}$$

onde $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ é o momento canónico.

c) Em que condições

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt} = 0?$$

Qual o interesse prático deste resultado?

Sugestão: Para um operador \mathcal{O} que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i[H, \mathcal{O}]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema. Não esquecer que H é diferente nas alíneas a) e b).

