

# Capítulo 5

## Grupos e Simetrias

Seguimos o capítulo 4 do Griffiths [1].

### 5.1 Simetrias, grupos e leis de conservação

Simetrias desempenham um papel muito importante em física e em particular em física de partículas. Isto deve-se por um lado à sua ligação às leis de conservação, por outro porque nos permitem conhecer determinadas propriedades dos sistemas sem ter de fazer todas as contas.

Comecemos com um exemplo deste último caso, adaptado do Griffiths. Consideremos a função representada na Fig. 5.1 Trata-se duma função ímpar. Como tal,

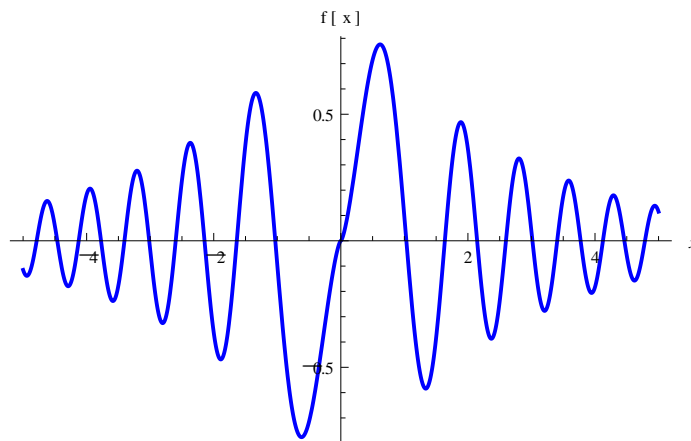


Figura 5.1: Função ímpar

sem mais, podemos fazer várias afirmações sem efetuar qualquer cálculo,

$$(f(-x))^4 = (f(x))^4, \quad \int_{-3}^3 f(x)dx = 0, \quad \int_{-5}^5 [f(x)]^2 dx = 2 \int_0^5 [f(x)]^2 dx \quad (5.1)$$

Podemos ainda afirmar que a sua série de Fourier só tem senos e que a expansão de Taylor só tem potências ímpares de  $x$ . Obtemos assim muita informação sem fazer qualquer cálculo. A simetria neste caso é a simetria de reflexão  $x \rightarrow -x$  debaixo da qual as funções podem ser pares ou ímpares ou não ter nenhuma simetria.

A importância das simetrias em relação com as leis de conservação vem do Teorema de Noether. O teorema diz que para cada simetria contínua há uma lei de conservação. Os exemplos mais importantes estão na Tabela 5.1. Em física das

Simetria	Lei de conservação
Translação no tempo	Energia
Translação no espaço	Momento linear
Rotação	Momento angular
Simetria de gauge	Carga

Tabela 5.1: Teorema de Noether: Simetrias e leis de conservação

partículas a versão do teorema de Noether que é importante é a versão de teoria de campo. Nós não iremos aqui fazer essa demonstração (ver o meu texto *Introdução à Física da Interação Eletrofraca* [12]), mas daremos só um exemplo da física clássica.

Consideremos um sistema com  $n$  graus de liberdade. A ação é dada por

$$S = \int dt L(\dot{q}_k, q_k, t) \quad (5.2)$$

e conduz às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

O momento é dado pela expressão,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (5.4)$$

Consideremos agora um sistema onde o lagrangeano  $L$  não depende das coordenadas  $q_k$ . Dizemos que o sistema tem uma simetria pois é invariante para translações  $q_k \rightarrow q_k + b$ . Quais as consequências? Se olharmos para a Eq. (5.3), vemos que  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$  e portanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} = 0 \quad (5.5)$$

logo o momento é conservado neste sistema. De modo semelhante se poderiam demonstrar os outros casos.

Até agora falámos de simetrias numa maneira intuitiva e não muito precisa. Mais rigorosamente uma simetria é uma operação que deixa um sistema invariante. Vejamos um exemplo, as simetrias do triângulo equilátero da Fig. 5.2. As simetrias

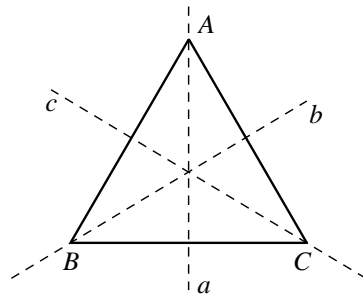


Figura 5.2: Simetrias do triângulo equilátero.

são as reflexões em torno dos eixos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e as rotações de  $120^\circ$  no sentido dos ponteiros dos relógios e no sentido contrário. Designamos essas operações por  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_+$  e  $R_-$ , respetivamente. Há ainda a operação de não fazer nada que designamos por identidade  $I$ . Estas seis operações são todas as operações de simetria do triângulo equilátero e forma aquilo a que os matemáticos chamam um grupo. Um conjunto de operações forma um grupo se tiver as seguintes propriedades:

1. Se dois elementos  $R_i$  e  $R_j$  estão no conjunto, então a aplicação sucessiva  $R_j R_i$  também pertence ao conjunto. (*Fecho*)
2. Existe um elemento designado por identidade tal que  $I R_i = R_i I = R_i$  para todos os elementos do conjunto
3. Para cada elemento do conjunto,  $R_i$ , existe um inverso, designado por  $R_i^{-1}$  tal que  $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$ .
4. A propriedade de associatividade é verificada, isto é,  $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$ .

Em geral  $R_i R_j \neq R_j R_i$ . Se  $R_i R_j = R_j R_i$  para todos os elementos do grupo o grupo designa-se por abeliano. Caso contrário por não-abeliano. Veremos que ambos são importantes na descrição das simetrias das interações fundamentais. É fácil de ver que o conjunto de simetrias do triângulo equilátero,  $I, R_+, R_-, R_a, R_b, R_c$  forma um grupo.

**Exemplo 5.1** *Construa a tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, isto é, complete a tabela*

	$I$	$R_+$	$R_-$	$R_a$	$R_b$	$R_c$
$I$	$I$	$R_+$	$R_-$	$R_a$	$R_b$	$R_c$
$R_+$	$R_+$	$R_-$	$I$	$R_b$	$R_c$	$R_a$
$R_-$	$R_-$	$I$	$R_+$	$R_c$	$R_a$	$R_b$
$R_a$	$R_a$	$R_c$	$R_b$	$I$	$R_-$	$R_+$
$R_b$	$R_b$	$R_a$	$R_c$	$R_+$	$I$	$R_-$
$R_c$	$R_c$	$R_b$	$R_a$	$R_-$	$R_+$	$I$

Notar que se trata dum grupo não abeliano pois, por exemplo,

$$R_a R_b \neq R_b R_a \quad (5.6)$$

Os grupos mais importantes em física são os grupos de matrizes

1.  $\mathbf{U}(n)$

Grupo das matrizes unitárias  $n \times n$ , isto é  $\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^T)^* = \mathbf{U}^\dagger$ .

2.  $\mathbf{SU}(n)$

São os subgrupos dos grupos unitários com  $\det \mathbf{U} = 1$ . Os exemplos mais importantes são  $\mathbf{SU}(2)$  e  $\mathbf{SU}(3)$ .

3.  $\mathbf{O}(n)$

Grupo das matrizes ortogonais  $n \times n$ , isto é  $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$ . O grupo de Lorentz, é um grupo de rotações num espaço pseudo-euclidiano e designa-se por  $\mathbf{O}(3, 1)$  onde o 3, 1 dizem respeito aos sinais da métrica pseudo-euclidiana.

4.  $\mathbf{SO}(n)$

Subgrupo de  $\mathbf{O}(n)$  com  $\det \mathbf{O} = 1$ . O exemplo mais importante é o grupo das rotações  $\mathbf{SO}(3)$ .

Para grupos de simetrias contínuos têm particular importância as transformações infinitesimais. Estas são expressas em termos dos geradores da álgebra do grupo. A álgebra é definida pelas relações de comutação dos geradores. Em mecânica quântica estes geradores correspondem a operadores como por exemplo, o momento angular e o spin, para dar dois exemplos importantes. Assim os geradores da álgebra do grupo das rotações  $\mathbf{SO}(3)$ , são os operadores do momento angular, com a álgebra,

$$[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (5.7)$$

que são as relações de comutação do operador momento angular em mecânica quântica. O mesmo se passa para o spin, a que correspondem as matrizes de Pauli, com a álgebra do grupo  $\mathbf{SU}(2)$ ,

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (5.8)$$

Vemos assim que as álgebras de  $\mathbf{SO}(3)$  e  $\mathbf{SU}(2)$  são idênticas e portanto estudando uma estudamos a outra. Em física é usual ser pouco cuidadoso e confundir a álgebra com o grupo e vice-versa.

## 5.2 Momento angular

Como vimos a conservação de momento angular está relacionada com a simetria para rotações. Assim em problemas com simetria esférica, como o átomo de hidrogénio, o momento angular tem um papel muito importante.

Há uma diferença fundamental entre o momento angular em mecânica clássica e mecânica quântica, embora a definição seja a mesma, isto é,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (5.9)$$

Em física clássica não há qualquer restrição à medição simultânea de todas as componentes de  $\vec{L}$  e os valores possíveis são contínuos. Contudo, em mecânica quântica, usando a relação fundamental,

$$[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \quad (5.10)$$

podemos mostrar que

$$[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (5.11)$$

e portanto  $[L_x, L_y] = i L_z$  o que de acordo com as regras da MQ nos diz que não podemos medir simultaneamente duas das componentes de  $\vec{L}$ . Se definirmos o quadrado do momento angular

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad (5.12)$$

podemos mostrar que  $L^2, L_z$ , comutam simultaneamente entre si,

$$[L^2, L_z] = 0 \quad (5.13)$$

e portanto podemos medir simultaneamente  $L^2$  e uma das componentes, que tradicionalmente se toma como  $L_z$ . A outra diferença para a mecânica clássica é que os valores são discretos. Mais precisamente,

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.14)$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (5.15)$$

com

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m_l = -l, -l+1, -l+2, \dots, 0, \dots, l-1, l \quad (5.16)$$

## 5.3 Spin 1/2

Na Natureza o spin 1/2 é o mais importante. De facto todos os quarks e leptões têm spin 1/2, dizemos que são fermiões. Assim é da máxima importância o estudo de spin 1/2.

Uma partícula com  $s = 1/2$  pode ter duas projeções de spin,  $m_s = \pm 1/2$ . Há várias notações para descrever esta situação, por exemplo  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Contudo uma notação mais conveniente é em termos de vetores colunas com duas componentes,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

A importância destes estados resulta do facto de eles serão os estados próprios de  $S_z$ . De facto definindo o spin através da relação usual,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (5.18)$$

onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli, obtemos,

$$S_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Um estado arbitrário de spin pode portanto ser escrito na forma,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A condição de normalização é  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , e de acordo com as regras básicas da MQ, devemos ter que a probabilidade duma medida de  $S_z$  dar  $+\hbar/2$  é  $|\alpha|^2$  enquanto que a probabilidade de dar  $-\hbar/2$  é  $|\beta|^2$ .

Suponhamos agora que queremos medir  $S_x$  no estado dado pela Eq. (5.20). Quais os valores possíveis e com que probabilidade? Como  $S_x$  não comuta com  $S_z$  não podemos responder diretamente. Abordemos primeiro a questão dos valores possíveis. Como dissemos anteriormente não há nada de especial sobre  $S_z$ , é só uma escolha, pelo que os valores possíveis devem ser também  $\pm\hbar/2$ . De facto na representação usual onde  $S_z$  é diagonal, temos

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

e facilmente vemos que os valores próprios são  $\pm\hbar/2$  a que correspondem os vetores próprios normalizados

$$\chi_{\pm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad S_x \chi_{\pm} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

De acordo com as regras da mecânica quântica os estados  $\chi_{\pm}$  formam uma base onde podemos expandir o estado da Eq. (5.20),

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

donde resulta,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \quad (5.24)$$

Agora podemos dizer que  $|a|^2$  e  $|b|^2$  representam as probabilidades duma medida de  $S_x$  dar  $\pm\frac{\hbar}{2}$ , respetivamente. Notar que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

### 5.3.1 Rotação de spinores

Sabemos da física elementar que escalares (spin 0) não se transformam numa rotação e que vetores (spin) se transformam como as coordenadas no espaço a 3 dimensões. A questão que se põe é como se transformam os objetos de spin 1/2, os spinores? A resposta, que não demonstraremos aqui, é

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \mathbf{U}(\vec{\theta}) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

onde

$$\mathbf{U}(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} \quad (5.26)$$

O vetor  $\vec{\theta}$  aponta na direção do eixo de rotação e o seu módulo é o ângulo de rotação.  $\mathbf{U}(\vec{\theta})$  é uma matriz unitária de determinante 1, pelo que o conjunto de todas as rotações forma o grupo  $\mathbf{SU}(2)$ . Dizemos que os spinores estão na representação a duas dimensões do grupo, enquanto que os escalares na representação uni-dimensional e os vetores na representação a três dimensões. Os diferentes spins correspondem a representações do grupo  $\mathbf{SU}(2)$  ou  $\mathbf{SO}(3)$  que, como vimos têm a mesma álgebra.

## 5.4 Adição de momentos angulares

Vimos numa aula anterior que o estado do eletrão pode ser descrito por dois momentos angulares,  $\vec{L}$  (momento angular orbital) e  $\vec{S}$  (spin). Em muitas aplicações é importante definir o chamado *momento angular total*,

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}, \quad [\vec{L}, \vec{S}] = 0. \quad (5.27)$$

Que  $\vec{J}$  é um momento angular é fácil de ver pois obedece à álgebra usual

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \quad (5.28)$$

como facilmente se mostra usando as definições anteriores. Quais os valores possíveis para  $\vec{J}$ ? Está fora do âmbito deste curso introdutório fazer uma apresentação completa da teoria do momento angular. Os resultados são no entanto simples de apresentar e serão relevantes para a compreensão da estrutura dos átomos e moléculas e de muitas questões em física de partículas. Vamos apresentá-los sob a forma de teoremas, sem demonstração:

**Teorema 5.1** *Seja um operador  $\vec{J}$  que obedece à álgebra do momento angular. Então os valores próprios de  $J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$  e  $J_z$  são*

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$J_z = m_j \hbar \quad (5.29)$$

em que  $j$  é um inteiro ou semi-inteiro e  $m_j$  toma os  $(2j + 1)$  valores

$$m_j = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j. \quad (5.30)$$

Casos particulares deste teorema, são evidentemente os casos  $\vec{J} = \vec{L}$  onde  $j = \ell =$  inteiro e  $\vec{J} = \vec{S}$  onde  $j = s = \frac{1}{2} =$  semi-inteiro.

**Teorema 5.2** *Seja  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$  o momento angular correspondente à soma de dois momentos angulares com valores  $j_1$  e  $j_2$ . Então o valor  $j$  correspondente a  $\vec{J}$  pode tomar os valores*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \quad (5.31)$$

**Teorema 5.3** *Seja  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ . Então o número de valores possíveis de  $m_j$  obedece à relação*

$$\sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \quad (5.32)$$

## 5.5 Simetrias internas

Na descrição das partículas elementares e das suas interações desempenham um papel muito importante simetrias que não têm que ver com operações no espaço-tempo. De facto atuam num espaço com graus de liberdade internos e por isso ficaram designadas por simetrias internas.

O melhor exemplo continua a ser o isospin, proposto por Heisenberg depois da descoberta do neutrão. Ao observar que as massas do próton e nucleão eram quase iguais, Heisenberg propôs que eles seriam dois estados duma entidade designada por nucleão e que a diferença de massa seria resultado do facto duma ter carga e a outra não, portanto devida às interações eletromagnéticas. Assim essa simetria, o isospin, seria uma simetria só das interações fortes. Tal como para o spin escrevíamos o nucleão,

$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

com o próton e o neutrão a serem representados por,

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Por analogia com o spin, introduzimos o isospin (não tem dimensões)

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (5.35)$$



e portanto o próton tem isospin  $+1/2$  enquanto que o neutrão tem isospin  $-1/2$ .

Até aqui isto é apenas notação. As consequências resultam de dizer que as interações fortes são invariantes para o grupo  $\mathbf{SU}(2)$  do isospin. Pelo teorema de Noether resulta que o isospin é conservado nas interações fortes e isso tem consequências experimentais. Esta simetria foi passada para os quarks, com os quarks  $u$  e  $d$  a terem as mesmas propriedades do próton e neutrão respetivamente. A descoberta da estranheza e do quark  $s$  levou a aumentar o grupo de simetria de  $\mathbf{SU}(2)$  para  $\mathbf{SU}(3)$ <sup>1</sup>. Na próxima aula verá como estes conceitos foram aplicados na construção do modelo de quarks, o chamado *Eightfold Way*.

## 5.6 Simetrias discretas

Até aqui vimos simetrias contínuas, tanto do espaço tempo como internas. Estas, pelo teorema de Noether correspondem a leis de conservação. Nesta secção vamos ver outro tipo de simetrias do espaço-tempo que são discretas. Não conduzem a leis de conservação mas têm uma importância fundamental na construção das teorias das interações fundamentais.

### 5.6.1 Paridade

Até 1957 todos os físicos acreditavam que todas as leis da Natureza eram invariantes para reflexões no espelho, tal como indicado na Fig. 5.3. De facto para formalizar é

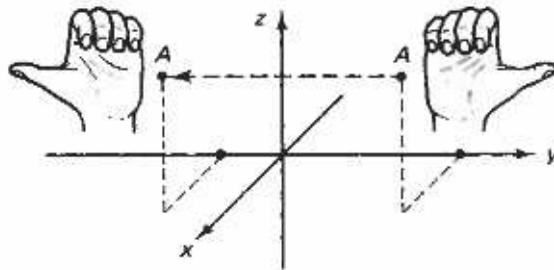
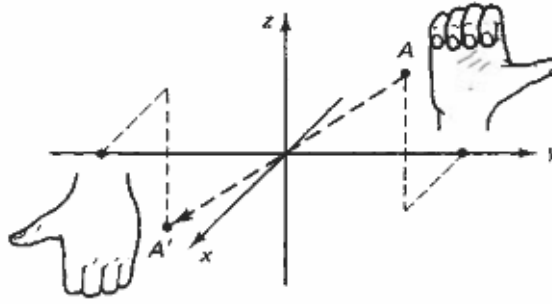


Figura 5.3: Reflexão no plano  $xz$

mais conveniente considerar inversões no espaço,  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  tal como indicado na Fig. 5.4. As duas operações diferem somente por uma rotação (de  $180^\circ$  em torno do eixo dos  $y$  neste caso) e se a teoria for invariante para rotações, como usualmente (as rotações são parte do grupo de Lorentz da relatividade restrita), não há diferença entre as duas. Designamos esta operação por Paridade e o respetivo operador por  $P$ . Devemos então ter para vetores,

$$P(\vec{r}) = -\vec{r}, \quad P(\vec{p}) = -\vec{p}, \quad P(\vec{E}) = -\vec{E}, \quad P(\vec{A}) = -\vec{A} \quad (5.36)$$

<sup>1</sup>Não confundir este  $\mathbf{SU}(3)$  com o  $\mathbf{SU}(3)_c$  da cor da cromodinâmica quântica. Por vezes designa-se a simetria entre os diferentes tipos de quark como  $\mathbf{SU}(3)_f$  de *flavour*, sabor em inglês.

Figura 5.4: Reflexão no plano  $xz$ 

isto é os vetores mudam de sinal como as coordenadas. No entanto das relações anteriores resulta que

$$P(\vec{L}) = P(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{L}, \quad P(\vec{B}) = P(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B} \quad (5.37)$$

isto é, apesar do nome usual, o momento angular e o campo magnético não são verdadeiros vetores. São designados por pseudo-vetores. Não podemos somar vetores com pseudo-vetores. Podemos verificar que, por exemplo a força de Lorentz é um verdadeiro vetor pois

$$P(\vec{F}) = P\left(q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\right) = -\vec{F} \quad (5.38)$$

pois  $\vec{B}$  é um pseudo-escalar mas o produto externo recupera o caráter vetorial. De igual forma há duas espécies de escalares, os escalares propriamente ditos que não mudam de sinal, como

$$P(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad (5.39)$$

e os pseudo-escalares que mudam, como por exemplo

$$P(\vec{E} \cdot \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (5.40)$$

Se aplicarmos  $P$  duas vezes voltamos ao início, e portanto

$$P^2 = I \quad (5.41)$$

o que indica que o grupo da paridade tem só dois elementos,  $I$  e  $P$ . Isto quer dizer que os seus valores próprios são  $\pm 1$ . De acordo com as regras de QFT, a paridade dos bósons deve ser igual à das suas antipartículas enquanto que os fermiões têm paridade oposta à dos seus anti-fermiões. Tomamos a paridade dos quarks positiva e a paridade dum sistema composto será o produto das paridades dos constituintes se o momento angular relativo for nulo. Não sendo nulo o momento angular, o resultado geral é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \quad (5.42)$$

o que dá  $(-1)^l$  para sistemas de bóson-anti-bóson e  $(-1)^{l+1}$  para sistemas de férmion-antiférmion. Para completar esta enumeração o fóton, descrito pelo potencial vetor, deve ter  $P(\gamma) = -1$ .

As interações fortes e eletromagnéticas eram conhecidas serem invariantes para transformações de paridade, e toda a gente pensava que isso seria uma regra geral, incluindo as interações fracas. Contudo em 1956 havia um puzzle, conhecido pelo puzzle  $\tau - \theta$ . Dois mesões de spin zero e com a mesma massa tinham os seguintes decaimentos,

$$\begin{aligned}\theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, & P &= (-1)^2 = +1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0, & P &= (-1)^3 = -1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, & P &= (-1)^3 = -1\end{aligned}\tag{5.43}$$

Assim a única diferença entre elas era a paridade assumindo que esta era conservada. Como os tempos de vida média eram muito diferentes, sendo o decaimento em três píons muito mais lento, Lee e Yang propuseram que o primeiro decaimento era devido às interações fortes e conserva a paridade, enquanto que o segundo era devido às interações fracas e não conservava a paridade. Ao buscarem na literatura verificaram que não havia prova que as interações fracas conservam de facto a paridade como era assumido. Propuseram então uma experiência que foi levada a cabo por Wu em 1957. Consistia em observar os eletrões do decaimento

$${}^{60}\text{Co}(J^P = 5^+) \rightarrow {}^{60}\text{Ni}(J^P = 4^+) + e + \bar{\nu}_e\tag{5.44}$$

com o spin dos núcleos de cobalto alinhado, digamos na direção positiva do eixo dos  $z$ . A experiência mostrou que os eletrões eram sempre produzidos na direção oposta ao do spin do núcleo. Como a diferença de spin é uma unidade, os spins do eletrão e anti-neutrino devem estar alinhados para somar a unidade que falta. O resultado da experiência quer dizer que o anti-neutrino tem sempre o seu spin alinhado com a direção do movimento (helicidade positiva) e que o eletrão é produzido na direção contrária ao seu spin (helicidade negativa). Como se sabia do eletromagnetismo que o eletrão podia ter as duas helicidades, devia ser o anti-neutrino que só podia ter helicidade positiva devendo a sua antipartícula, o neutrino, ter sempre helicidade negativa. Como os neutrinos só participam da interação fraca, esta devia violar a paridade. Muitas experiências desde essa altura confirmaram ser esse o caso.

### 5.6.2 Conjugação de carga

A operação de conjugação de carga  $C$  transforma os estados de uma partícula na sua antipartícula, deixando as coordenadas e o spin sem alteração. Muda assim o sinal dos números quânticos aditivos, como a carga, número bariónico e número leptónico. Como  $C^2 = I$  os seus valores próprios só podem ser  $\pm 1$ . Só partículas completamente neutras, para as quais todas as cargas são nulas, podem ser estado próprios do operador  $C$ . Estas são o fóton e alguns mesões neutros como o  $\pi^0$ . Como

o fóton é o quanta do campo eletromagnético deve mudar de sinais se mudarmos todas as cargas que lhe dão origem devemos ter para o fóton  $C = -1$ . Do facto que o existe o decaimento,

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (5.45)$$

devemos ter  $C(\pi^0) = +1$ . Pode-se mostrar que para um sistema de partícula-antipartícula ( $p\bar{p}$ ) com spin total  $s$  e momento orbital  $l$  temos o resultado

$$C(p\bar{p}) = (-1)^{l+s} . \quad (5.46)$$

A conjugação de carga é uma simetria das interações fortes e eletromagnética, mas não das interações fracas, pois quando aplicado a um neutrino esquerdo (helicidade negativa) produz um anti-neutrino esquerdo (a helicidade não é alterada pela operação) e esta partícula não existe na Natureza.

### 5.6.3 Violação de CP

Embora  $C$ , e  $P$  não sejam simetrias das interações fracas, verifica-se que o produto CP é quase uma simetria das interações fracas. No exemplo anterior se depois de aplicar  $C$  ao anti-neutrino aplicarmos  $P$  invertemos a helicidade e temos um neutrino esquerdo como existem na Natureza. No entanto verificou-se experimentalmente em 1964 no sistema  $K^0\bar{K}^0$  que isto não era o caso e que havia uma violação pequena de CP. Mas recentemente este resultado foi confirmado noutro sistema, como o  $B^0\bar{B}^0$ . É portanto um resultado que tem de ser incorporado na teoria das interações fracas. Voltaremos a este assunto no final do semestre.

### 5.6.4 Inversão no tempo e o teorema TCP

A terceira simetria discreta do espaço-tempo é a chamada inversão no tempo, designada pelo operador  $T$ . Classicamente as equações fundamentais do eletromagnetismo e da mecânica são invariante se mudarmos o sinal do tempo. Se virmos o filme ao contrário não damos por isso. Ao nível da física quântica, as interações fortes e eletromagnéticas têm esta simetria, mas as interações fracas poderiam não ter.

As experiências para esclarecer esta questão são muito complicadas, pois não é possível usar colisões. O melhor que podemos fazer é medir quantidades que deveriam ser nulas se a inversão no tempo fosse uma boa simetria da teoria. Os candidatos são por exemplo a medição do momento dipolar elétrico do electrão e neutrão, para os quais só existem neste momento limites superiores,

$$d_n < 6 \times 10^{-26} \text{ e cm}, \quad d_e < 1.6 \times 10^{-27} \text{ e cm} \quad (5.47)$$

Existe em TQC um teorema que diz que o produto das três operações TCP deve ser conservado. Ainda não foi encontrada qualquer prova que não é verdade. Se o tomarmos como certo, sabendo que o produto  $CP$  não é completamente conservado (violação de  $CP$ ), então  $T$  também deverá ter a mesma violação.

## Problemas capítulo 5

**5.1** Construa a tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, dada no exemplo 3.1. Verifique que o grupo é não abeliano.

**5.2** O grupo de Poincaré é constituído pelo grupo de Lorentz mais as translações. Se  $J_{\mu\nu}$  designarem os geradores do grupo de Lorentz e  $P_\mu$  os geradores das translações, as relações de comutação são

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}) \quad (5.48)$$

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = i(g_{\mu\alpha}P_\nu - g_{\nu\alpha}P_\mu) \quad (5.49)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

Mostre que

$$[P^2, J_{\mu\nu}] = [P^2, P_\mu] = 0 \quad (5.50)$$

$$[W^2, J_{\mu\nu}] = [W^2, P_\mu] = [W^2, P^2] = 0$$

onde

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$$

é o vetor (operador) de Pauli-Lubanski. Qual a importância deste resultado?

**5.3** Um sistema de duas partículas ligadas, no seu referencial próprio com momento angular  $l$  e projeção  $m$  segundo o eixo dos  $z$  pode ser escrito como

$$||\vec{p}|, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) |\vec{p}, -\vec{p}\rangle \quad (5.51)$$

Use a propriedades das harmónicas esféricas,

$$Y_{lm}^*(\theta - \pi, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (5.52)$$

Para mostrar que a paridade do sistema é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \tag{5.53}$$

onde  $P_i$  são as paridades intrínsecas dos dois constituintes.