

Capítulo 7

As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.4 do livro do Bettini [15] e as secções 4.1 e 4.5 do meu livro FIE [12].

7.1 A teoria de Fermi

A teoria das interações fracas começou com a teoria de Fermi para o decaimento β .

$$n \rightarrow p + e + \nu \quad (7.1)$$

Na altura eram conhecidos o protão, o neutrão, o eletrão e o neutrino que foi precisamente introduzido para que a conservação da energia fosse satisfeita. Para explicar o decaimento 7.1 Fermi introduziu o seguinte lagrangeano

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (7.2)$$

que corresponde ao diagrama de Feynman da Fig. 7.1. Com este lagrangeano pode-se

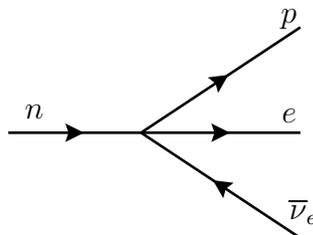


Figura 7.1: Decaimento β do neutrão

112 Capítulo 7. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

calcular a largura do decaimento. Obtemos para a amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\alpha u(p) \bar{u}(k) \gamma_\alpha v(q_2) \quad (7.3)$$

De facto não podemos descrever os nucleões por ondas planas, mas temos que usar funções de onda nucleares. Isto resulta nalguma complicação em que não vamos aqui entrar [16]. Com algumas aproximações obtemos para o espectro de energia do eletrão emitido

$$N(E) = \frac{d\Gamma}{dE} = \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \quad (7.4)$$

onde E é a energia do eletrão e

$$\Delta = m_n - m_p \quad (7.5)$$

O espectro de energias está representado na Fig. 7.2

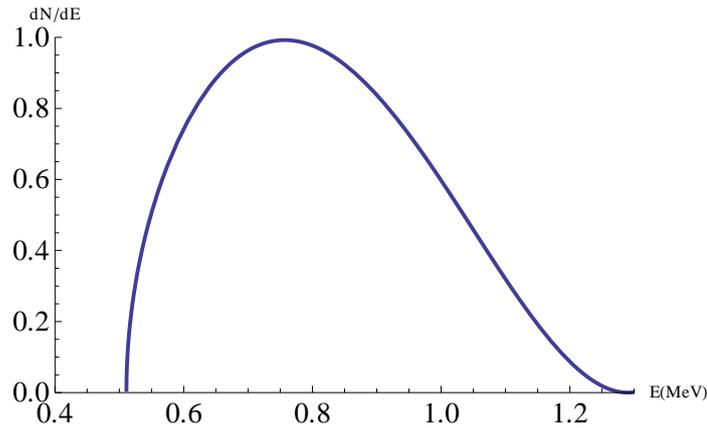


Figura 7.2: Espectro de energias do eletrão no decaimento β . As unidades são arbitárias

Para a largura total vem então

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \int_{m_e}^{\Delta} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \\ &= 3.6 \times 10^{-3} G_\beta^2 \quad \text{todas as grandezas em MeV} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Conhecendo o tempo de vida média do neutrão obtinha-se um valor para G_β

$$G_\beta \simeq 1.4 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (7.7)$$

Notar que o valor de G_β é ajustado para se obter o valor de Γ . O sucesso da teoria estava em prever um espectro $N(E)$ em acordo com o que era na altura medido.

7.2 A teoria V-A

7.2.1 Introdução

Depois do sucesso da teoria de Fermi, procurou-se estender o método a outros decaimentos radioativos. Para isso foi importante notar que o lagrangeano 7.2 se pode escrever na forma

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J_p^\alpha J_{e\alpha} + \text{h.c.} \quad (7.8)$$

onde J_e^α e J_p^α são as *correntes* definidas por

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu, \quad J_p^\alpha = \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \quad (7.9)$$

Estas correntes são semelhantes à corrente eletromagnética em QED. Como vimos no capítulo 3, (ver a Ref. [2] para mais detalhes) estas correntes têm um carácter vetorial, isto é, numa transformação de Lorentz transformam-se como um vetor. O lagrangeano assim construído é portanto um escalar de Lorentz. Mas em 1936 Gamow e Teller [17] mostraram que a Eq. (7.2) não é única e que o lagrangeano escalar mais geral deveria ser uma mistura da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & c_1 \bar{\psi}_p \psi_n \bar{\psi}_e \psi_\nu & S \times S \\ & + c_2 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu & V \times V \\ & + c_3 \bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n \bar{\psi}_e \sigma_{\alpha\beta} \psi_\nu & T \times T \\ & + c_4 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu & A \times A \\ & + c_5 \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu & P \times P \end{aligned}$$

e os coeficientes da combinação linear só podem ser determinados pela experiência. Na Eq. (7.10) estão indicadas as propriedades de transformação para transformações de Lorentz dos diferentes termos. Gamow e Teller mostraram que no limite não relativista se obtém

$$SS, VV \rightarrow \Delta J = 0 \quad (7.10)$$

$$AA, TT \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1 \quad (7.11)$$

Portanto, enquanto que a descrição de Fermi ($V \times V$) poderia explicar transições com $\Delta J = 0$, alguma parte de $A \times A$ ou $T \times T$ deverá estar presente para explicar as transições com $|\Delta J| = 1$. Um grande trabalho experimental foi então empreendido para determinar os coeficientes c_i .

7.2.2 Violação de paridade nas interações fracas

Todo o trabalho anterior foi feito tendo como hipótese de base que a Paridade era conservada nas interações fracas, tal como o é no eletromagnetismo. Contudo, como

vimos no capítulo 5, em 1956 Lee e Yang [18] mostraram que esta ideia devia ser abandonada para explicar o chamado $\tau - \theta$ puzzle. Este consistia em compreender porque é que os dois decaimentos

$$\begin{aligned}\theta & : K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0 \\ \tau & : K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^- \end{aligned} \quad (7.12)$$

podiam ocorrer simultaneamente quando as paridades dos dois estados finais eram diferentes, isto é

$$P(\pi^+\pi^0) = +1 \quad ; \quad P(\pi^+\pi^+\pi^-) = -1 \quad (7.13)$$

Isto poderia acontecer se a Paridade não fosse conservada nas interações fracas. Eles propuseram então um conjunto de experiências para testar esta ideia, e nos dois anos seguintes foi mostrado que de facto assim é, em particular na experiência de Wu *et al.*, [19]. Assim a construção de Gamow e Teller tem que ser modificada para incluir, por exemplo, termos da forma $V \times A$,

$$\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu \quad (7.14)$$

Era preciso recomeçar do início e comparar com a experiência de novo.

7.2.3 Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica

Nesta busca experimental que levou à descoberta da violação da Paridade nas interações fracas uma descoberta importante que foi feita diz respeito aos neutrinos, nomeadamente que eles têm helicidade negativa. Como o projetor da helicidade negativa é

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (7.15)$$

isto quer dizer que

$$\psi_\nu = P_L \psi_\nu \quad (7.16)$$

Como consequência disto a corrente leptónica para o eletrão deverá ser

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} \quad (7.17)$$

o que também foi confirmado experimentalmente. Convém aqui notar que para uma partícula qualquer com massa, como o eletrão, se pode sempre escrever

$$\psi_e = P_L \psi_e + P_R \psi_e \quad (7.18)$$

Então a estrutura da corrente leptónica mostra que só a componente esquerda do eletrão participa na interação. De facto

$$\bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L^2 \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\alpha P_L \psi_\nu$$

$$= \psi_e^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \overline{(P_L \psi_e)} \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \quad (7.19)$$

Se tivermos uma interação geral da forma $V - A$

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi \quad (7.20)$$

e se introduzirmos

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (7.21)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R \end{aligned} \quad (7.22)$$

pois os termos cruzados são nulos. Mostremos isso para um deles. Obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R &= \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_L P_R \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde se usaram as propriedades de ortogonalidade dos projetores P_L e P_R . Isto quer dizer que uma corrente vetorial ou vetorial axial conserva a helicidade. Por outras palavras quer também dizer que pode ser construída para partículas que tenham só uma helicidade, como é o caso dos neutrinos. O mesmo não se passa para o termo de massa. O termo de massa usual de Dirac é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{massa} &= -m \bar{\psi} \psi \\ &= -m (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (\psi_L + \psi_R) \\ &= -m \bar{\psi}_L \psi_R - m \bar{\psi}_R \psi_L \end{aligned} \quad (7.24)$$

pois

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \psi_L &= \overline{(P_L \psi)} P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 P_L \psi = \psi^\dagger \gamma^0 P_R P_L \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

e de igual modo para $\bar{\psi}_R \psi_R$. Como conclusão, o neutrino não poderá ter um termo de massa do tipo acima indicado¹.

¹De facto há a possibilidade de ter termos de massa do tipo de Majorana, que não serão discutidos aqui.

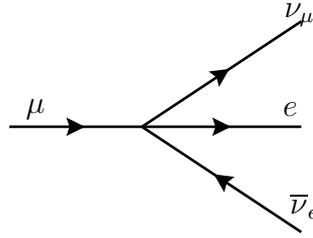


Figura 7.3: Decaimento do múon.

7.2.4 A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann

Fazendo a síntese de todo o trabalho iniciado com a teoria de Fermi, em 1958 Feynman e Gell-Mann [20] propuseram que as interações fracas deveriam ser descritas pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger} \quad (7.26)$$

onde

$$J^\mu = \ell^\mu + h^\mu \quad (7.27)$$

sendo ℓ^μ e h^μ as partes leptónica e hadrónica dessa corrente. Os resultados experimentais mostraram que a estrutura da corrente leptónica deveria ser do tipo $V - A$, isto é

$$\ell^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\tau} \quad (7.28)$$

Quando a teoria foi proposta não existia o τ . Mas experimentalmente foi verificado que a estrutura para o τ era a mesma e que a intensidade relativa das três partes da corrente era igual. Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. A constante G_F que aparece em 7.26 é de facto ligeiramente diferente de G_β da teoria de Fermi. O seu valor podia ser determinado calculando o decaimento do múon descrito pelo diagrama da Fig. 7.3 e que não tem as complicações da física hadrónica referidas a propósito do decaimento do neutrão.

A amplitude que resulta de 7.26 é

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (7.29)$$

e um cálculo simples (ver por exemplo a Ref. [2]) dá (desprezando m_e),

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (7.30)$$

donde se conclui que

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (7.31)$$

A parte hadrónica da corrente fraca, h^α , será estudada mais adiante. Vejamos aqui com um pouco mais de detalhe a corrente leptónica. Para isso notemos primeiro que podemos escrever

$$\ell^\alpha = 2\bar{\psi}_L(e)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_e) + 2\bar{\psi}_L(\mu)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\mu) + 2\bar{\psi}_L(\tau)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\tau) \quad (7.32)$$

isto é, a corrente escreve-se completamente em termos das componentes esquerdas dos campos. Definimos agora um *isospin esquerdo* para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num dubleto da forma

$$\chi_L(e) \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (7.33)$$

Então a corrente leptónica escreve-se

$$\ell^\alpha = 2 \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) + \bar{\chi}_L(\mu)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\mu) + \bar{\chi}_L(\tau)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\tau) \right] \quad (7.34)$$

onde

$$\bar{\chi}_L(e) = \left[\bar{\nu}_e, \bar{e} \right] \quad (7.35)$$

e expressões semelhantes para os outros leptões, e onde definimos

$$\tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \quad (7.36)$$

Notar que

$$\tau^-\chi_L(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad (7.37)$$

Somos assim tentados a definir uma corrente de isospin esquerdo através de

$$j_L^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^i\chi_L(e) + \dots \right] \quad (7.38)$$

Então se introduzirmos a notação

$$j_L^{\pm\alpha} \equiv \frac{j_L^{1\alpha} \pm ij_L^{2\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (7.39)$$

vemos que

$$\ell^\alpha = 2\sqrt{2} (j_L^-)^\alpha \quad (7.40)$$

e que

$$\ell^{\alpha\dagger} = 2\sqrt{2} (j_L^+)^\alpha \quad (7.41)$$

Embora estejamos a introduzir um formalismo adaptado a $SU_L(2)$ o lagrangeano na Eq. (7.26) não é invariante para esse grupo pois falta o termo² $j_{L\mu}^{3\dagger}j_L^{3\mu}$. Dito de

²De facto considerando só a parte do eletrão e seu neutrino obtemos

$$\mathcal{L}_{lep} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) \bar{\chi}_L(e)\gamma_\alpha\tau^+\chi_L(e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_L^{1\alpha}j_{L\alpha}^1 + j_L^{2\alpha}j_{L\alpha}^2)$$

outro modo, todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada pois $\Delta Q \neq 0$. Um termo como $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$ que faria a Eq. (7.26) invariante para transformações de $SU_L(2)$, implicaria a existência de correntes fracas neutras, o que só viria a ser descoberto mais tarde. Vemos assim que a parte leptónica do lagrangeano de Feynman e Gell-Mann sugeria já que o grupo de simetria fosse $SU_L(2)$ e a descoberta das correntes neutras veio confirmá-lo, como discutiremos no capítulo 9.

7.3 As interações fracas dos hádrões

7.3.1 Universalidade e a teoria de Cabibbo

As interações fracas dos hádrões são um pouco mais complicadas. Parte dessa complicação resulta, claro, das próprias interações fortes e da sua propriedade de *confinamento*, que quer dizer que a teoria fundamental é simples de escrever em termos dos quarks mas que estes não são partículas livres, só aparecendo na natureza como estados ligados. Assim todos os cálculos de interações com hádrões são muito difíceis. Nós apresentaremos primeiro os resultados em termos das correntes dos hádrões, mas depois traduziremos esses resultados para o lagrangeano ao nível dos quarks.

Do ponto de vista das interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrónicas. O primeiro é relevante para o decaimento β do neutrão representado na Fig. 7.1. Dizemos que este decaimento corresponde a $\Delta S = 0$, isto é não há variação do número quântico estranheza (é zero para todas as partículas envolvidas). Há no entanto outro tipo de decaimentos em que $\Delta S = \pm 1$, como por exemplo

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (7.42)$$

representado na Fig. 7.4. A parte da corrente leptónica é igual, mas a parte

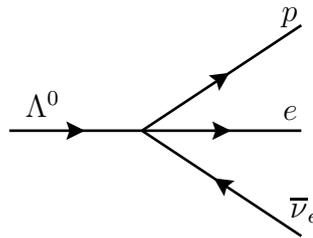


Figura 7.4: O decaimento $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$.

hadrónica tem agora $\Delta S = 1$ ($\Lambda^0 = uds$). Além disso, a parte hadrónica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão. Os resultados experimentais podem ser resumidos da forma seguinte

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \quad (7.43)$$

onde tanto a parte $\Delta S = 0$, $h_\mu^{(0)}$, como a parte $\Delta S = 1$, $h_\mu^{(1)}$, têm a forma $V - A$, isto é

$$\begin{aligned} h_\mu^{(0)} &= V_\mu^{(0)} - A_\mu^{(0)} \\ h_\mu^{(1)} &= V_\mu^{(1)} - A_\mu^{(1)} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Considerações de simetria relativas ao grupo $SU(3)$ para as interações fortes dos quarks u , d e s , levaram Cabibbo em 1963 [21] a propor que

$$g_V^2 + g_S^2 = 1 \quad (7.45)$$

o que foi verificado experimentalmente. Em vez de g_V e g_S , é mais normal introduzir um ângulo designado por *ângulo de Cabibbo*, tal que

$$g_V = \cos \theta_c \quad ; \quad g_S = \sin \theta_c \quad (7.46)$$

Experimentalmente verifica-se que

$$\sin \theta_c \simeq 0.22 \quad (7.47)$$

Em resumo o facto essencial é que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hadrónica. Mais concretamente se tomarmos a corrente leptónica como referência temos a situação descrita na Tabela 7.1 o que mostra que a universalidade é menos perfeita no sector hadrónico.

Corrente	Intensidade
l_α	1
$h_\alpha^{(0)}$	$\cos \theta_c$
$h_\alpha^{(1)}$	$\sin \theta_c$

Tabela 7.1: Intensidade relativa das correntes fracas leptónica e hadrónica.

Estes factos permitem-nos descrever agora as correntes hadrónicas ao nível dos quarks. A corrente hadrónica tem então a forma seguinte

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d + \sin \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_s . \quad (7.48)$$

A ideia é que a interação que transforma um neutrão

$$n = (udd) \quad ; \quad Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (7.49)$$

num protão

$$p = (uud) \quad ; \quad Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad (7.50)$$

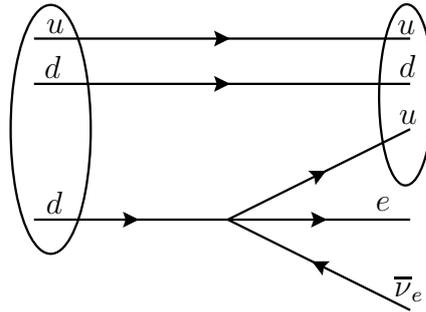


Figura 7.5: Decaimento $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ em termos de quarks.

deve ser aquela que leva um quark $d \rightarrow u$ ($\Delta Q = 1$) e em termos de quarks o decaimento β seria representado nesta aproximação pela Fig. 7.5 Claro que o confinamento torna esta descrição demasiado simplista, mas a hipótese é que a estrutura da teoria ao nível do lagrangeano em termos de quarks está correta. Não nos preocupando mais com as complicações das interações fortes, vejamos melhor a estrutura em termos dos campos dos quarks. Como o u e d diferem duma unidade de carga, as correntes $h_\alpha^{(0)}$ e $h_\alpha^{(1)}$ são correntes carregadas, tal como acontecia para a corrente leptónica. Por outro lado são também correntes esquerdas. Vejamos se é possível dar-lhes uma forma onde apareçam sinais do grupo $SU_L(2)$. Para isso observemos que

$$\begin{aligned} h^\alpha &= \cos \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s \\ &= \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) \end{aligned} \quad (7.51)$$

onde passámos a representar os campos pelo seu nome, isto é, por exemplo para o quark u , $u \equiv \psi_u$. Se olharmos para a equação anterior somos levados a introduzir um dubleto de quarks da forma

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \quad (7.52)$$

onde

$$d_c \equiv d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad (7.53)$$

Então a corrente pode ser escrita na forma

$$h^\alpha = 2 \bar{Q}_L \tau^+ Q_L \quad (7.54)$$

onde

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \quad (7.55)$$

Na Eq. (7.52) o índice L quer dizer

$$Q_L = \begin{pmatrix} P_L u \\ P_L d_c \end{pmatrix} . \quad (7.56)$$

Mais uma vez para que o lagrangeano (7.26) tenha invariância para $SU_L(2)$ falta a componente neutra

$$h^{3\alpha} = 2\sqrt{2}\bar{Q}_L\gamma^\alpha\tau^3Q_L \quad (7.57)$$

7.3.2 O mecanismo de GIM e a descoberta do charm

Como vimos a teoria de Cabibbo para as correntes carregadas permite escrever a corrente hadrónica carregada através de

$$h_\alpha^+ = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^+Q_L \quad ; \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

onde o sinal + em h_α^+ quer dizer que a corrente aumenta a carga por uma unidade, isto é

$$\Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1 \quad (7.59)$$

De igual modo podemos introduzir a corrente que diminui a carga por uma unidade,

$$h_\alpha^- = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^-Q_L \quad (7.60)$$

e portanto o lagrangeano para a parte hadrónica será³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{had}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha h^{\alpha\dagger} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha^- h^{+\alpha} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_\alpha^1 h^{1\alpha} + h_\alpha^2 h^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (7.61)$$

onde

$$h_\alpha^i = \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^iQ_L \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (7.62)$$

Tal como para o sector leptónico somos levados a pensar se não falta o termo $h_\alpha^3 h^{3\alpha}$ para ter o lagrangeano (7.61) invariante para $SU_L(2)$. Ora a corrente h_α^3 escreve-se

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^3Q_L \\ &= \bar{u}_L\gamma_\alpha u_L - \bar{d}_{cL}\gamma_\alpha d_{cL} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Esta corrente tem $\Delta Q = 0$ e é portanto uma corrente neutra. A questão é então saber se existem correntes neutras na parte hadrónica das interações fracas. Experimentalmente verificou-se que sim, mas só com $\Delta S = 0$, isto é, não havia, ou eram extremamente suprimidas, as correntes neutras com mudança de estranheza. Isto põe um problema à interpretação acima pois o termo $\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL}$ contém partes com $\Delta S \neq 0$. De facto

$$\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL} = \cos^2\theta_c \bar{d}_L\gamma^\alpha d_L + \sin^2\theta_c \bar{s}_L\gamma^\alpha s_L$$

³Estamos a considerar neste ponto que há só os quarks u, d, s . Mais à frente veremos como aparecem os outros.

$$+ \sin \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma^\alpha s_L + \bar{s}_L \gamma^\alpha d_L) \quad (7.64)$$

e o último termo tem $\Delta S \neq 0$. Portanto se quisermos insistir na simetria $SU_L(2)$ com a conseqüente introdução de h_α^3 , temos que resolver este problema. Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani [22] resolveram esta questão numa forma muito elegante. Para isso postularam a existência dum segundo dubleto de $SU_L(2)$ onde apareceria um novo quark de carga $Q = 2/3$, designado por *charm* e a combinação ortogonal a d_c designada agora por s_c ,

$$s_c = -\sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad ; \quad Q = -\frac{1}{3} \quad (7.65)$$

Designemos esse dubleto por

$$Q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

Então a corrente neutra completa deverá ser

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L + \bar{Q}'_L \gamma_\alpha \tau^3 Q'_L \\ &= \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L \end{aligned} \quad (7.67)$$

pois os termos cruzados na Eq. (7.64) cancelam agora exatamente. A este mecanismo dá-se o nome de *mecanismo de GIM*. Na altura em que o quark c foi proposto não havia ainda evidência experimental para ele. Este facto foi atribuído por GIM a ele dever ser relativamente pesado. É para crédito de GIM que eles não só propuseram o quark c como também forneceram uma estimativa para a sua massa. O argumento é o seguinte. Tomemos o decaimento

$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (7.68)$$

É um decaimento com corrente neutra e $\Delta S \neq 0$ pelo que não deveria existir de acordo com o mecanismo de GIM. Na realidade não é assim e experimentalmente verifica-se que existe, embora seja extremamente raro. De facto

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \equiv \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{tudo})} = (6.3 \pm 1.1) \times 10^{-9} \quad (7.69)$$

Como é que isto se enquadra no que dissemos acima? Muito simplesmente o mecanismo de GIM proíbe interações de corrente neutra com $\Delta S \neq 0$ somente ao nível árvore. Em ordem superior tais processos poderão existir. Assim para este processo podemos temos os dois diagramas da Fig. (7.6). Comparando os acoplamentos nos vértices o diagrama com o quark u tem uma amplitude

$$M_u \propto \sin \theta_c \cos \theta_c \quad (7.70)$$

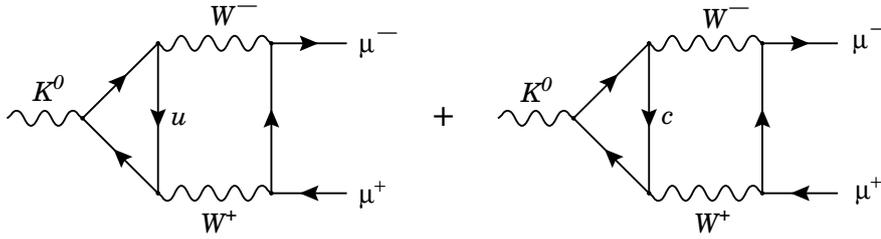


Figura 7.6: Diagramas para $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

enquanto que o diagrama com o quark c tem a amplitude

$$M_c \propto -\sin \theta_c \cos \theta_c \quad (7.71)$$

Tudo o mais é igual exceto a massa dos quarks. Se $m_u = m_c$ os dois diagramas cancelariam exatamente dando uma contribuição zero em conflito com a Eq. (7.69). Se $m_c \gg m_u$ o segundo diagrama será muito pequeno (não esquecer a massa no denominador do propagador do quark) e GIM calcularam que a contribuição do primeiro diagrama era demasiado grande para comparar com o valor observado experimentalmente. Para satisfazer o valor experimental a massa do quark c deveria estar num intervalo não muito largo. Eles encontraram

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV} \quad (7.72)$$

em comparação com o valor hoje aceite

$$m_c = 1.4 \text{ GeV} \quad (7.73)$$

Mais uma vez a via da simetria obtinha resultados importantes. Com o mecanismo de GIM é possível promover a simetria da parte hadrónica do lagrangeano fraco ao grupo $SU_L(2)$.

7.4 A hipótese do bóson vetorial intermédio

Como vimos a teoria de Fermi foi motivada pela analogia com QED. Mas essa analogia é imperfeita pois não há o análogo do fóton, o portador da interação eletromagnética. Assim, desde muito cedo apareceu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas. Esse campo, designado por W , deveria ser também vetorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas. Na linguagem dos diagramas de Feynman, devíamos ter para o decaimento do muão o diagrama da Fig. (7.7) e as interações fracas seriam então mediadas pelo W da mesma maneira que as interações eletromagnéticas são mediadas pelo fóton. Ao W foi dado na altura o nome de *Bosão Vetorial Intermédio*

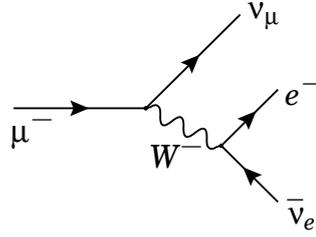


Figura 7.7: Decaimento do múon com bóson vetorial intermédio.

ou IVB atendendo às iniciais em inglês. A ideia seria então que o lagrangeano na Eq. (7.26) seria substituído por um outro do tipo

$$\mathcal{L}_{weak} = g_w J_\mu W^\mu + \text{h.c.} \quad (7.74)$$

onde g_w é agora uma constante de acoplamento sem dimensões. Para tornar a teoria completa precisamos de saber o seu propagador. Para isso necessitamos da equação de onda para partículas de spin 1 com massa. Essa equação, designada por equação de Proca e escreve-se

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu = J^\mu \quad (7.75)$$

O propagador é então a função de Green solução da equação

$$[(\square + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_F^{\nu\rho}(x - x') = ig^{\mu\rho} \delta^4(x - x') \quad (7.76)$$

Passando para o espaço dos momentos obtemos

$$[(-k^2 + m^2)g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] G_F^{\nu\rho}(k) = ig^{\mu\rho} \quad (7.77)$$

que tem como solução (ver Problema 4.2)

$$G_F^{\nu\rho} = i \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{k^\nu k^\rho}{m^2}}{k^2 - m^2} \quad (7.78)$$

Então o elemento de matriz para o decaimento do μ^- será da forma

$$\mathcal{M} = g_w^2 J_\mu G_F^{\mu\nu} J_\nu \quad (7.79)$$

e portanto se $k^2 \ll m^2$ devemos ter

$$G_F \simeq \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (7.80)$$

Se $g \sim e$ então

$$m_W \sim e \sqrt{G_F} \sim 90 \text{ GeV} \quad (7.81)$$

o que justificaria a aproximação acima. Veremos mais à frente, no quadro do Modelo Standard, qual a relação exata entre G_F , g_w e m_W .

7.5 Problemas com a teoria corrente-corrente

7.5.1 Violação da unitariedade na interação de Fermi

Apresentámos nas secções anteriores uma teoria que descreve toda a fenomenologia conhecida das interações fracas em finais da década de sessenta. Contudo a teoria apresenta uma série de dificuldades que passamos a rever brevemente. Começemos pela interação pontual de 4 fermiões de Fermi (modificada por Feynman e Gell-Mann). Consideremos o processo

$$\mu^-(p_1) + \bar{\nu}_\mu(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4) \quad (7.82)$$

descrito neste modelo pelo diagrama da Fig. (7.8). Como os problemas que vamos

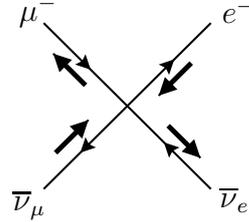


Figura 7.8: Diagrama para $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

exibir ocorrem para $\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu$, vamos desprezar essas massas. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu P_L v(p_4) \end{aligned} \quad (7.83)$$

Como os antineutrinos têm helicidade positiva há só uma possibilidade de helicidades não nula,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2, \uparrow) \gamma^\mu u(p_1, \downarrow) \bar{u}(p_3, \downarrow) \gamma_\mu v(p_4, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} s(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (7.84)$$

onde usámos as Eqs. (4.67) e (4.69). Portanto

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 4G_F^2 s^2 (1 + \cos \theta)^2. \quad (7.85)$$

126 Capítulo 7. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

No limite em que se desprezam as massas obtemos para a secção eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s(1 + \cos\theta)^2 \quad (7.86)$$

A secção eficaz total será então

$$\sigma = \frac{g_F^2}{3\pi} s \quad (7.87)$$

Mas por outro lado, a secção eficaz de difusão pode-se escrever na forma geral

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J+1) |f_J|^2 \quad (7.88)$$

onde k é o momento no centro de massa e f_J é a onda parcial correspondente ao momento angular J . Pode-se mostrar em geral, usando argumentos de unitariedade ou, o que é o mesmo, de conservação de probabilidade, que

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J \quad (7.89)$$

e portanto

$$|f_J| \leq 1 \quad (7.90)$$

donde se obtém

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J+1)}{k^2} = \frac{16\pi(2J+1)}{s} \quad (7.91)$$

o que mostra que σ_J decresce com s . Mas pode-se mostrar que este processo corresponde a $J = 1$ (ver problema 4.4) e para a secção eficaz não polarizada deveremos ter

$$\sigma \leq \frac{24\pi}{s} \quad (7.92)$$

o que entra em conflito com a Eq. (7.87) para

$$\sqrt{s} \geq 1.5 \times 10^3 \text{ GeV} \quad (7.93)$$

A dificuldade com a teoria pontual pode ser relacionada com o facto da constante G_F ter dimensões. De facto

$$[G_F] = M^{-2} \quad (7.94)$$

mas

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2} \quad (7.95)$$

e portanto a energias acima das massas dos leptões um argumento puramente dimensional dá

$$\sigma \sim G_F^2 s \quad (7.96)$$

dado que a secção eficaz deverá ser proporcional a G_F^2 . Isto foi exactamente o que encontramos.

7.5.2 Violação de unitariedade no modelo IVB

O argumento anterior podia levar-nos a pensar que a dificuldade desapareceria no modelo com o bóson vetorial intermédio (IVB). Isto porque aí

$$G_F \sim \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (7.97)$$

e poderia acontecer que a muita alta energia

$$\sigma \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (7.98)$$

como acontece, por exemplo no processo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em QED. Vamos mostrar que embora o comportamento seja melhor no modelo IVB, ainda não resolve todos os problemas. Voltemos ao processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ que agora se representa na Fig. (7.9).

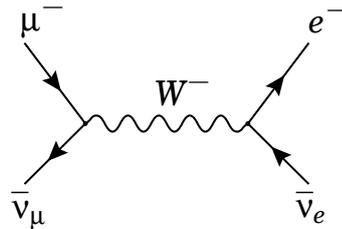


Figura 7.9:

A amplitude é agora

$$\mathcal{M} = g_w^2 \bar{\nu}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (7.99)$$

Poder-se-ia pensar que os fatores de momento no numerador do propagador do W iriam piorar o comportamento para valores elevados da energia no centro de massa. Tal não é verdade, pois uma vez utilizada a equação de Dirac, esses termos vão ser proporcionais à massa dos leptões que desprezamos no limite das altas energias. Então para $\sqrt{s} \gg m_W$ obtemos

$$\mathcal{M} \simeq \frac{g_w^2}{s} \bar{\nu}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (7.100)$$

o que comparado com a Eq. (7.83) mostra que

$$G_F \rightarrow \frac{g_w^2}{s} \quad (7.101)$$

128 Capítulo 7. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

Então o cálculo da secção eficaz dá

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-) \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (7.102)$$

o que está de acordo com a unitariedade. Como dissemos atrás, embora deixe de haver problema para este processo, outros há em que os problemas persistem. Para vermos isso consideremos o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^- \quad (7.103)$$

no quadro do modelo IVB. Temos então o diagrama da Fig. (7.10). A amplitude é

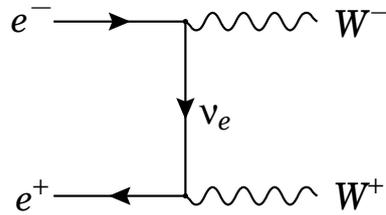


Figura 7.10: Colisão $e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$.

proporcional a

$$\mathcal{M} \sim g_w^2 \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) \epsilon_\mu^*(q_2, \lambda_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 - \not{q}_1}{(p_1 - q_1)^2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \quad (7.104)$$

No limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ pode-se mostra que obtemos

$$|\overline{M}|^2 \sim \frac{g_w^4}{m_W^4} sf(\theta) \quad (7.105)$$

o que mostra que temos novamente o mesmo problema que na teoria pontual de Fermi, como se vê comparando com a Eq. (7.85). Um estudo mais detalhado mostra que o problema está na polarização longitudinal dos W 's. Notar que o processo semelhante

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (7.106)$$

em QED não tem qualquer problema. Podemos assim suspeitar que a invariância de gauge de QED, relacionada com a massa zero do fóton, e a ausência de polarização longitudinal, deve ser a chave do problema.

Problemas capítulo 7

7.1 Mostre que da equação de Dirac se obtém para as componentes ψ_L e ψ_R

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (7.107)$$

Comente este resultado.

7.2 Resolva a Eq. (7.77) para encontrar o propagador duma partícula de spin 1 com massa. Para isso faça

$$G_F^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (7.108)$$

e determine as funções invariantes $A(k^2)$ e $B(k^2)$.

7.3 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ descrito na secção 7.5.1. Mostre que no referencial do centro de massa o momento angular é $J = 1$. Explique então porque é que

$$M \propto (1 + \cos \theta) \quad (7.109)$$

7.4 Considere o processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$. Mostre que

a) A secção eficaz diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi} s \quad (7.110)$$

b) A secção eficaz total é dada por

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (7.111)$$

c) Mostre que no C.M. temos só $J = 0$. Use esse facto para extrair um limite a partir do qual a unitariedade é violada.

