Física de Partículas
Aula 5
Grupos e Simetrias

Jorge C. Romão
Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

2014

Sumário da Aula

- Simetrias, Grupos e Leis de Conservação
- Momento Angular
- Spin 1/2
- Adição de momentos angulares
- Simetrias Internas
- Simetrias Discretas
  - Paridade
  - Conjugação de carga
  - Inversão no tempo
  - Teorema TCP

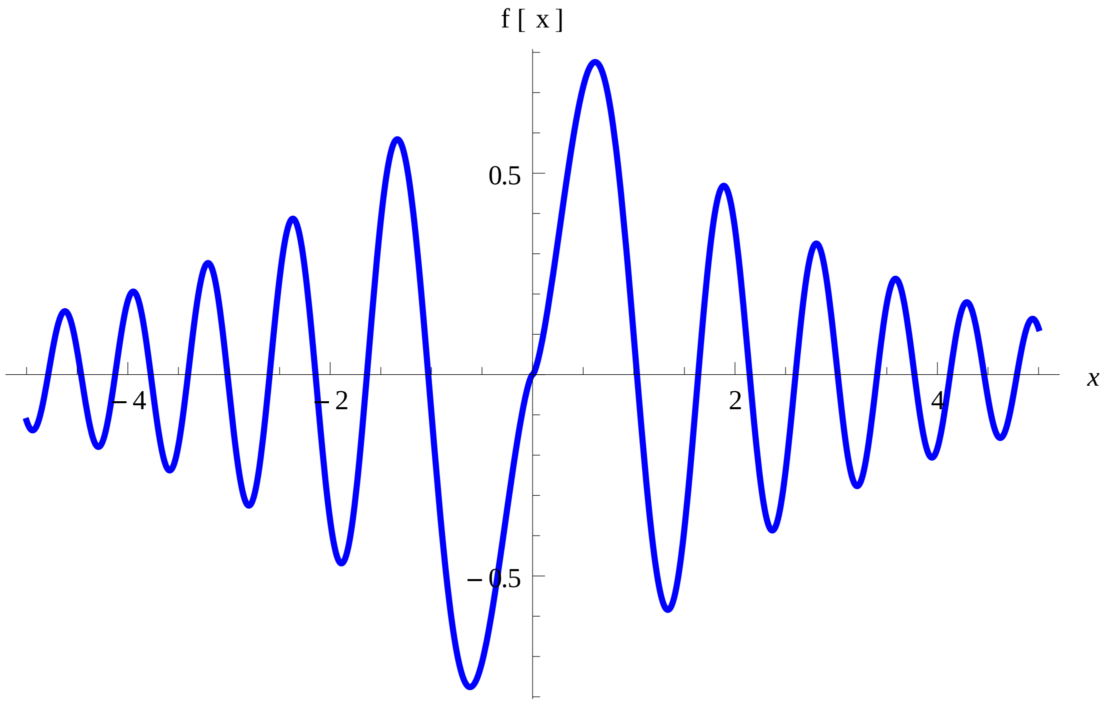

Figure 1: Função ímpar

Trata-se duma função ímpar. Como tal, sem mais, podemos fazer várias afirmações sem efetuar qualquer cálculo,

$$(f(-x))^4 = (f(x))^4, \quad \int_{-3}^{3} f(x)dx = 0, \quad \int_{-5}^{5} [f(x)]^2\, dx = 2\int_{0}^{5} [f(x)]^2\, dx$$

Teorema de Noether

- A importância das simetrias em relação com as leis de conservação vem do Teorema de Noether.
- O teorema diz que para cada simetria contínua há uma lei de conservação.
- Os exemplos mais importantes estão na Tabela 1.

Simetria	Lei de conservação
Translação no tempo	Energia
Translação no espaço	Momento linear
Rotação	Momento angular
Simetria de gauge	Carga

Table 1: Teorema de Noether: Simetrias e leis de conservação

Gupos de Simetria

- Até agora falámos de simetrias duma maneira intuitiva e não muito precisa.
- Mais rigorosamente uma simetria é uma operação que deixa um sistema invariante.

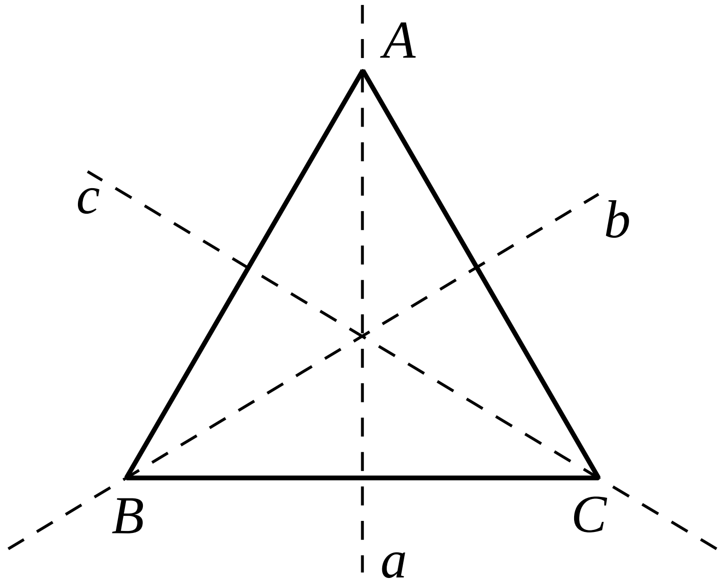

Figure 2: Simetrias do triângulo equilátero.

- As simetrias são as reflexões em torno dos eixos a, b e c, e as rotações de 120° no sentido dos ponteiros dos relógios e no sentido contrário. Designamos essas operações por R_a, R_b, R_c, R_+ e R_-, respetivamente. Há ainda a operação de não fazer nada que designamos por identidade I.

Gupos de Simetria

- Estas seis operações são todas as operações de simetria do triângulo equilátero e forma aquilo a que os matemáticos chamam um grupo.
- Um conjunto de operações forma um grupo se tiver as seguintes propriedades:
  1. Se dois elementos R_i e R_j estão no conjunto, então a aplicação sucessiva $R_j R_i$ também pertence ao conjunto. (*Fecho*)
  2. Existe um elemento designado por identidade tal que $I R_i = R_i I = R_i$ para todos os elementos do conjunto
  3. Para cada elemento do conjunto, R_i, existe um inverso, designado por R_i^{-1} tal que $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$.
  4. A propriedade de associatividade é verificada, isto é, $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$.
- Em geral $R_i R_j \neq R_j R_i$. Se $R_i R_j = R_j R_i$ para todos os elementos do grupo o grupo designa-se por abeliano. Caso contrário por não-abeliano. Veremos que ambos são importantes na descrição das simetrias das interações fundamentais.

Grupo de simetrias do triângulo equilátero

- É fácil de ver que o conjunto de simetrias do triângulo equilátero, $I, R_+, R_-, R_a, R_b, R_c$ forma um grupo.
- Tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero

	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
I	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
R_+	R_+	R_-	I	R_b	R_c	R_a
R_-	R_-	I	R_+	R_c	R_a	R_b
R_a	R_a	R_c	R_b	I	R_-	R_+
R_b	R_b	R_a	R_c	R_+	I	R_-
R_c	R_c	R_b	R_a	R_-	R_+	I

- Notar que se trata dum grupo não abeliano pois, por exemplo,

$$R_a R_b \neq R_b R_a$$

Grupos em Física

Os grupos mais importantes em física são os grupos de matrizes

1. $\mathbf{U}(n)$
   Grupo das matrizes unitárias $n \times n$, isto é $\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^T)^* = \mathbf{U}^\dagger$.
2. $\mathbf{SU}(n)$
   São os subgrupos dos grupos unitários com $\det \mathbf{U} = 1$. Os exemplos mais importantes são $\mathbf{SU}(2)$ e $\mathbf{SU}(3)$.
3. $\mathbf{O}(n)$
   Grupo das matrizes ortogonais $n \times n$, isto é $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$. O grupo de Lorentz, é um grupo de *rotações* num espaço pseudo-euclidiano e designa-se por $\mathbf{O}(3,1)$ onde $3,1$ diz respeito aos sinais da métrica pseudo-euclidiana.
4. $\mathbf{SO}(n)$
   Subgrupo de $\mathbf{O}(n)$ com $\det \mathbf{O} = 1$. O exemplo mais importante é o grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$.

Álgebras

- Para grupos de simetrias contínuos têm particular importância as transformações infinitesimais. Estas são expressas em termos dos geradores da álgebra do grupo.
- A álgebra é definida pelas relações de comutação dos geradores. Em mecânica quântica estes geradores correspondem a operadores como por exemplo, o momento angular e o spin, para dar dois exemplos importantes.
- Assim os geradores da álgebra do grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$, são os operadores do momento angular, com a álgebra,

$$[L_i, L_j] = i\,\epsilon_{ijk}\; L_k$$

- O mesmo se passa para o spin, a que correspondem as matrizes de Pauli, com a álgebra do grupo $\mathbf{SU}(2)$,

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\,\epsilon_{ijk}\; \frac{\sigma_k}{2}$$

- Vemos assim que as álgebras de $\mathbf{SO}(3)$ e $\mathbf{SU}(2)$ são idênticas e portanto estudando uma estudamos a outra. Em física é usual ser pouco cuidadoso e confundir a álgebra com o grupo e vice-versa.

Momento Angular

- Como vimos a conservação de momento angular está relacionada com a simetria para rotações.
- Em física clássica não há qualquer restrição à medição simultânea de todas as componentes de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e os valores possíveis são contínuos.
- Em mecânica quântica, usando a relação fundamental,

  $$[x_i, p_j] = i\,\hbar\,\delta_{ij} \Rightarrow [L_i, L_j] = i\,\epsilon_{ijk}\ L_k$$

  e portanto não podemos medir simultaneamente duas componentes de $\vec{L}$.
- Se definirmos o quadrado do momento angular

  $$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\ ,$$

  podemos mostrar que L^2, L_z, comutam simultaneamente entre si,

  $$[L^2, L_z] = 0$$

  e portanto podemos medir simultaneamente L^2 e uma das componentes, que tradicionalmente se toma como L_z.

Momento Angular

- A outra diferença para a mecânica clássica é que os valores são discretos.
- Mais precisamente,

$$\begin{aligned} L^2 Y_{lm_l}(\theta,\phi) &= \hbar^2\, l(l+1)\, Y_{lm_l}(\theta,\phi) \\ L_z Y_{lm_l}(\theta,\phi) &= \hbar\, m_l\, Y_{lm_l}(\theta,\phi)\ . \end{aligned}$$

- Com l, m_l tomando os valores

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad m_l = -l, -l+1, -l+2, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$$

- Notar ainda que

$$\sum_{m_l=-l}^{l} m_l = 2l+1$$

Spin 1/2

- Na Natureza o spin $1/2$ é o mais importante. De facto todos os quarks e leptões têm spin $1/2$, dizemos que são fermiões.
- Uma partícula com $s = 1/2$ pode ter duas projeções de spin, $m_s = \pm 1/2$. Há várias notações para descrever esta situação, por exemplo $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. A mais conveniente é em termos de vetores colunas com duas componentes,

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A importância destes estados resulta do facto de eles serão os estados próprios de S_z. De facto definindo o spin através da relação usual,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli, obtemos,

$$S_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spin 1/2

- Um estado arbitrário de spin pode portanto ser escrito na forma,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A condição de normalização é $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$,
- De acordo com as regras básicas da MQ, devemos ter que a probabilidade duma medida de S_z dar $+\hbar/2$ é $|\alpha|^2$ enquanto que a probabilidade de dar $-\hbar/2$ é $|\beta|^2$.

Rotação de spinores

- Sabemos da física elementar que escalares (spin 0) não se transformam numa rotação e que vetores (spin 1) se transformam como as coordenadas no espaço a 3 dimensões.
- A questão que se põe é como se transformam os objetos de spin 1/2, os spinores? A resposta, que não demonstraremos aqui, é

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \mathbf{U}(\vec{\theta}) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \mathbf{U}(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}$$

- O vetor $\vec{\theta}$ aponta na direção do eixo de rotação e o seu módulo é o ângulo de rotação. $\mathbf{U}(\vec{\theta})$ é uma matriz unitária de determinante 1, pelo que o conjunto de todas as rotações forma o grupo $\mathbf{SU}(2)$.
- Dizemos que os spinores estão na representação a duas dimensões do grupo, enquanto que os escalares na representação uni-dimensional e os vetores na representação a três dimensões. Os diferentes spins correspondem a representações do grupo $\mathbf{SU}(2)$ ou $\mathbf{SO}(3)$ que, como vimos têm a mesma álgebra.

Adição de momentos angulares

- Vimos numa aula anterior que o estado do eletrão pode ser descrito por dois momentos angulares, $\vec{L}$ (momento angular orbital) e $\vec{S}$ (spin). Em muitas aplicações é importante definir o chamado *momento angular total*,

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S} \ , \quad [\vec{L}, \vec{S}] = 0$$

- Que $\vec{J}$ é um momento angular é fácil de ver pois obedece à álgebra usual

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z , \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x , \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

como facilmente se mostra usando as definições anteriores.

- Quais os valores possíveis para $\vec{J}$? Está fora do âmbito deste curso introdutório fazer uma apresentação completa da teoria do momento angular. Os resultados são no entanto simples de apresentar e serão relevantes para a compreensão da estrutura dos átomos e moléculas e de muitas questões em física de partículas. Vamos apresentá-los sob a forma de teoremas, sem demonstração:

Teoremas da adição de momentos angulares

Teorema 1 *Seja um operador $\vec{J}$ que obedece à álgebra do momento angular. Então os valores próprios de $J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$ e J_z são*

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2 \ , \qquad J_z = m_j \hbar$$

em que j é um inteiro ou semi-inteiro e m_j toma os $(2\, j + 1)$ valores

$$m_j = -j, -j+1, ..., j-1, j \ .$$

Teorema 2 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ o momento angular correspondente à soma de dois momentos angulares com valores j_1 e j_2. Então o valor j correspondente a $\vec{J}$ pode tomar os valores*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \ .$$

Teorema 3 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Então o número de valores possíveis de m_j obedece à relação*

$$\sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2\, j+1) = (2\, j_1 + 1)\ (2\, j_2 + 1) \ .$$

Simetrias Internas

- Na descrição das partículas elementares e das suas interações desempenham um papel muito importante simetrias que atuam num espaço com graus de liberdade internos e por isso ficaram designadas por simetrias internas.

- O melhor exemplo continua a ser o isospin. Ao observar que as massas do protão e nucleão eram quase iguais, Heisenberg propôs que eles seriam dois estados duma entidade designada por nucleão e que a diferença de massa seria resultado do facto duma ter carga e a outra não, portanto devida às interações eletromagnéticas. Tal como para o spin escrevíamos o nucleão,

$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Por analogia com o spin, introduzimos o isospin (não tem dimensões)

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

e portanto o protão tem isospin $+1/2$ enquanto que o neutrão tem $-1/2$.

Simetrias internas

- Até aqui isto é apenas notação. As consequências resultam de dizer que as interações fortes são invariantes para o grupo $\mathbf{SU}(2)$ do isospin. Pelo teorema de Noether resulta que o isospin é conservado nas interações fortes e isso tem consequências experimentais.
- Esta simetria foi passada para os quarks, com os quarks u e d a terem as mesmas propriedades do protão e neutrão respetivamente. A descoberta da estranheza e do quark s levou a aumentar o grupo de simetria de $\mathbf{SU}(2)$ para $\mathbf{SU}(3)$
- Não confundir este $\mathbf{SU}(3)$ com o $\mathbf{SU}(3)_c$ da cor da cromodinâmica quântica. Por vezes designa-se a simetria entre os diferentes tipos de quark como $\mathbf{SU}(3)_f$ de *flavour*, sabor em inglês.
- Na próxima aula verão como estes conceitos foram aplicados na construção do modelo de quarks, o chamado *Eightfold Way*.

Paridade

Até 1957 todos os físicos acreditavam que todas as leis da Natureza eram invariantes para reflexões no espelho, tal como indicado na figura

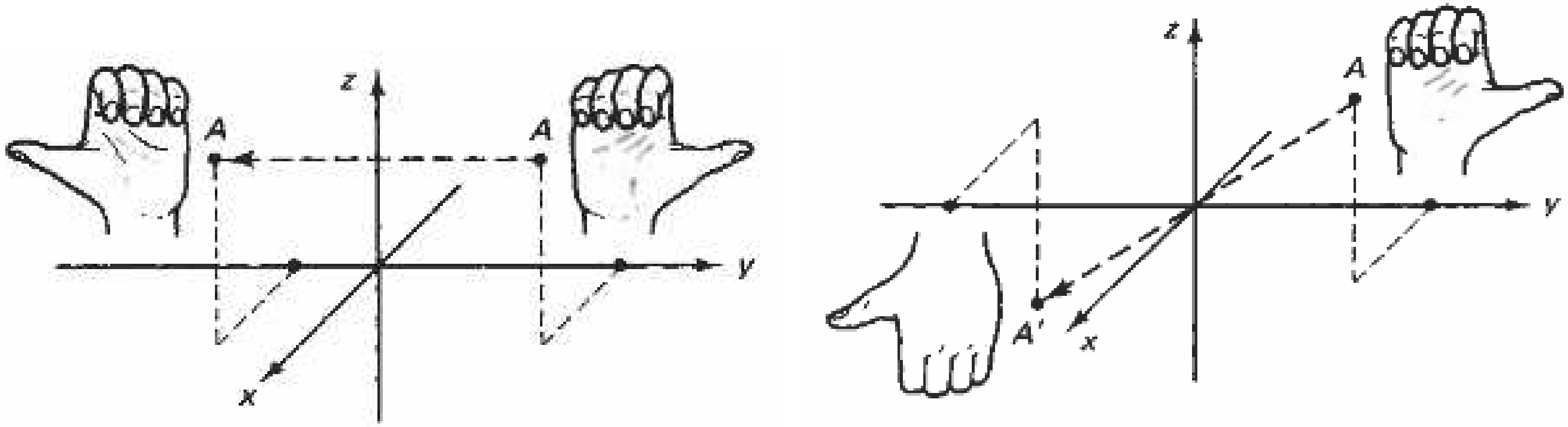

Figure 3: Reflexão no plano xz e inversão $\vec{r} \to -\vec{r}$

As duas operações diferem somente por uma rotação (de $180°$ em torno do eixo dos y neste caso) e se a teoria for invariante para rotações, como usualmente (as rotações são parte do grupo de Lorentz da relatividade restrita), não há diferença entre as duas.

Paridade

- Designamos esta operação por Paridade e o respetivo operador por P. Devemos então ter para vetores,

$$P(\vec{r}) = -\vec{r}, \quad P(\vec{p}) = -\vec{p}, \quad P(\vec{E}) = -\vec{E}, \quad P(\vec{A}) = -\vec{A}$$

isto é os vetores mudam de sinal como as coordenadas.

- No entanto das relações anteriores resulta que

$$P(\vec{L}) = P(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{L}, \quad P(\vec{B}) = P(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B}$$

isto é, apesar do nome usual, o momento angular e o campo magnético não são verdadeiros vetores. São designados por pseudo-vetores.

- Não podemos somar vetores com pseudo-vetores. Podemos verificar que, por exemplo a força de Lorentz é um verdadeiro vetor pois

$$P(\vec{F}) = P\left(q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\right) = -\vec{F}$$

pois $\vec{B}$ é um pseudo-escalar mas o produto externo recupera o caráter vetorial.

Paridade

- De igual forma há duas espécies de escalares, os escalares propriamente ditos que não mudam de sinal, como

$$P(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{r}$$

e os pseudo-escalares que mudam, como por exemplo

$$P(\vec{E} \cdot \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{B}\ .$$

- Se aplicarmos P duas vezes voltamos ao inicio, e portanto

$$P^2 = I \quad \text{valores próprios são } \pm 1$$

o que indica que o grupo da paridade tem só dois elementos, I e P.

- De acordo com as regras de QFT, a paridade dos bosões deve ser igual à das suas antipartículas enquanto que os fermiões têm paridade oposta à dos seus anti-fermiões. Não sendo nulo o momento angular, o resultado geral é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l$$

o que dá $(-1)^l$ para sistemas de bosão-anti-bosão e $(-1)^{l+1}$ para sistemas de fermião-antifermião. Para completar esta enumeração o fotão, descrito pelo potencial vetor, deve ter $P(\gamma) = -1$.

A descoberta da violação da Paridade

- As interações fortes e eletromagnéticas eram conhecidas serem invariantes para transformações de paridade, e toda a gente pensava que isso seria uma regra geral, incluindo as interações fracas.

- Contudo em 1956 havia um puzzle, conhecido pelo puzzle $\tau - \theta$. Dois mesões de spin zero e com a mesma massa tinham os seguintes decaimentos,

$$\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad P = (-1)^2 = +1$$
$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0, \quad P = (-1)^3 = -1$$

  Assim a única diferença entre elas era a paridade assumindo que esta era conservada.

- Como os tempos de vida média eram muito diferentes, sendo o decaimento em três piões muito mais lento, Lee e Yang propuseram que o primeiro decaimento era devido à interações fortes e conserva a paridade, enquanto que o segundo era devido às interações fracas e não conservava a paridade.

- Ao buscarem na literatura verificaram que não havia prova que as interações fracas conservam de facto a paridade como era assumido. Propuseram então uma experiência que foi levada a cabo por Wu em 1957.

Experiência de Wu

- Consistia em observar os eletrões do decaimento

$$^{60}\text{Co}(J^P = 5^+) \to {}^{60}\text{Ni}(J^P = 4^+) + e + \overline{\nu}_e$$

com o spin dos núcleos de cobalto alinhado, digamos na direção positiva do eixo dos z.

- A experiência mostrou que os eletrões eram sempre produzidos na direção oposta ao do spin do núcleo. Como a diferença de spin é uma unidade, os spins do eletrão e anti-neutrino devem estar alinhados para somar a unidade que falta.

- O resultado da experiência quer dizer que o anti-neutrino tem sempre o seu spin alinhado com a direção do movimento (helicidade positiva) e que o eletrão é produzido na direção contrária ao seu spin (helicidade negativa).

- Como se sabia do eletromagnetismo que o eletrão podia ter as duas helicidades, devia ser o anti-neutrino que só podia ter helicidade positiva devendo a sua antipartícula, o neutrino, ter sempre helicidade negativa. Como os neutrinos só participam da interação fraca, esta devia violar a paridade. Muitas experiências desde essa altura confirmaram ser esse o caso.

Conjugação de Carga

- A conjugação de carga C transforma os estados de uma partícula na sua antipartícula, deixando as coordenadas e o spin sem alteração. Muda assim o sinal dos números quânticos aditivos, como a carga, número bariónico etc. Como $C^2 = I$ os seus valores próprios só podem ser ± 1.
- Só partículas completamente neutras podem ser estado próprios do operador C. Estas são o fotão e alguns mesões neutros como o π^0. Como o fotão é o quanta do campo eletromagnético deve mudar de sinais se mudarmos todas as cargas que lhe dão origem devemos ter para o fotão $C = -1$. Do decaimento,

  $$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

  devemos ter $C(\pi^0) = +1$. Pode-se mostrar que para um sistema de partícula-antipartícula $(p\overline{p})$ com spin total s e momento orbital l temos

  $$C(p\overline{p}) = (-1)^{l+s} \ .$$

- A conjugação de carga é uma simetria das interações eletromagnética e forte, mas não das interações fracas, pois quando aplicado a um neutrino esquerdo (helicidade negativa) produz um anti-neutrino esquerdo (a helicidade não é alterada pela operação) e esta partícula não existe na Natureza.

Violação de CP

- Embora C, e P não sejam simetrias das interações fracas, verifica-se que o produto CP é quase uma simetria das interações fracas.
- No exemplo anterior se depois de aplicar C ao anti-neutrino aplicarmos P invertemos a helicidade e temos um neutrino esquerdo como existem na Natureza. No entanto verificou-se experimentalmente em 1964 no sistema $K^0\overline{K}^0$ que isto não era o caso e que havia uma violação pequena de CP.
- Mas recentemente este resultado foi confirmado noutro sistema, como o $B^0\overline{B}^0$. É portanto um resultado que tem de ser incorporado na teoria das interações fracas.
- Voltaremos a este assunto no final do semestre.

Inversão no Tempo e o teorema TCP

- A terceira simetria discreta do espaço-tempo é a chamada inversão no tempo, designada pelo operador T. Classicamente as equações fundamentais do eletromagnetismo e da mecânica são invariante se mudarmos o sinal do tempo. Se virmos o filme ao contrário não damos por isso. Ao nível da física quântica, as interações fortes e eletromagnéticas têm esta simetria, mas as interações fracas poderiam não ter.

- As experiências para esclarecer esta questão são muito complicadas, pois não é possível usar colisões. O melhor que podemos fazer é medir quantidades que deveriam ser nulas se a inversão no tempo fosse uma boa simetria da teoria. Os candidatos são por exemplo a medição do momento dipolar elétrico do eletrão e neutrão, para os quais só existem neste momento limites

$$d_n < 6 \times 10^{-26}\, \mathrm{e\,cm}, \quad d_e < 1.6 \times 10^{-27}\, \mathrm{e\,cm}$$

- Existe em TQC um teorema que diz que o produto das três operações TCP deve ser conservado. Ainda não foi encontrada qualquer prova que não é verdade. Se o tomarmos como certo, sabendo que o produto CP não é completamente conservado (violação de CP), então T também deverá ter a mesma violação.