



Física de Partículas

Aula 6

Invariância de Gauge

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

2014

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

[Regras de Feynman](#)

- ❑ Lagrangeanos em mecânica clássica
- ❑ Lagrangeanos em teoria de campo
- ❑ Invariância de gauge. O eletromagnetismo como paradigma
- ❑ Teorias de Yang-Mills
- ❑ Regras de Feynman para a teoria de gauge pura

- Em mecânica clássica a equação fundamental é a lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Se um sistema for conservativo então a força pode ser obtida dum função potencial, $U(\vec{r})$, através da relação

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

e portanto as equações do movimento escrevem-se

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U .$$

- A mesma dinâmica pode ser obtida num formalismo alternativo, designado por formalismo lagrangeano. Aí começa-se por definir o lagrangeano (ou função de Lagrange) através da relação

$$L = T - U$$

onde T é a energia cinética, $T = \frac{1}{2}mv^2$ e U a energia potencial

- As equações da dinâmica resultam de exigir que a ação definida por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L$$

seja estacionária ($\delta S = 0$) para a trajetória da partícula.

- Este requisito conduz às chamadas equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

para um sistema com n coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ e onde se definiu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} .$$

- Aplicando a um problema a três dimensões obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\nabla_i U$$

o que conduz às mesmas equações de movimento

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

[Regras de Feynman](#)

- ❑ A este nível parece uma complicação desnecessária. No entanto, os lagrangeanos são muito úteis por duas razões.
- ❑ Primeiro porque alguns problemas são mesmo mais fáceis de resolver usando este formalismo (por exemplo pêndulos acoplados)
- ❑ Em segundo lugar porque as simetrias conduzem naturalmente a leis de conservação.
- ❑ De facto já discutimos no capítulo de simetrias esta relação.
- ❑ Por exemplo, se L não depender das coordenadas, as equações de Euler-Lagrange imediatamente nos dizem que o momento linear é conservado.

- Os lagrangeanos em teoria de campo relativista têm uma importância fundamental. Isto deve-se fundamentalmente à importância que as simetrias têm na descrição das interações fundamentais da Natureza e essas simetrias são implementadas duma maneira muito mais simples nos lagrangeanos.
- Em mecânica clássica as variáveis dependem do tempo, $x_i(t)$, enquanto que em teoria de campo lidamos com campos que dependem do ponto do espaço tempo $x^\mu = (t, \vec{x})$, por exemplo para um campo escalar, $\phi(x)$.
- Não vamos aqui fazer uma dedução da situação em teoria do campo. Vamos só dar o resultado sobre a forma de dicionário

Sistemas Finitos graus liberdade	Teoria do Campo
t	x^μ
q	$\phi(x)$
\dot{q}	$\partial_\mu \phi(x)$
$S = \int dt L(q, \dot{q})$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

- É fácil de verificar que para o campo real de Klein-Gordon a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

reproduz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0 .$$

- Para o campo de Dirac temos que tratar o spinor e o seu adjunto como graus de liberdade independentes (tal como acontece no campo escalar complexo, ver Problemas). Assim é fácil de ver que a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

conduz à equação de Dirac. De facto, as equações de Euler-Lagrange são, para o caso do campo de Dirac,

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

- Do lagrangeano de Dirac obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi$$

e portanto

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0,$$

como queríamos mostrar.

- A densidade Lagrangeana de Dirac tem uma propriedade notável. É invariante para as transformações

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad ; \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi} e^{-i\alpha}$$

com α constante. Isto corresponde a redefinir a fase da função de onda, que certamente é arbitrária. Veremos na secção seguinte as implicações que esta observação terá.

- Antes de terminar consideremos mais dois exemplos, o caso dum campo de spin 1 com massa e o caso do fóton, spin 1 sem massa.

- Considere o lagrangeano de Proca para uma partícula de spin 1 com massa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

onde, como habitualmente

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Vamos deduzir as equações de Euler-Lagrange. Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu$$

e portanto as equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

que usaremos no capítulo seguinte quando discutirmos o bóson vetorial intermédio

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

[Regras de Feynman](#)

- Consideremos o lagrangeano de Maxwell com interação com uma corrente exterior,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$

- Obtemos facilmente

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = -F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = -J^{\nu}$$

- Obtemos portanto as equações de Maxwell,

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu} .$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- It is a scalar under Lorentz ($x' = a^\mu{}_\nu x^\nu$, $\psi'(x') = S\psi(x)$, $\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}$)

- ◆ $\bar{\psi}\psi$ is a scalar under Lorentz transformations

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

- ◆ As under Lorentz transformations

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

is a vector (transforms like the coordinates) and ∂_μ is also a vector, then the Lorentz scalar product of two vectors is a scalar

- It is a number, 1×1 matrix, in Dirac space. For instance,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = [\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2$$

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

[Regras de Feynman](#)

- ❑ Nas transformações consideradas na secção anterior o parâmetro α era constante. A invariância *global* queria então dizer que a escolha das fases era arbitrária e que se escolhêssemos as fases doutra maneira ao mesmo tempo em todos os pontos do espaço-tempo a teoria seria idêntica.
- ❑ Dissemos no capítulo de Simetrias que a existência destas invariâncias implicava que houvesse quantidades conservadas no tempo.
- ❑ Posta a questão nestes termos, a pergunta que surge naturalmente é saber se há teorias em que a escolha das convenções das fases pode ser feita localmente, isto é, diferente para cada ponto do espaço-tempo.
- ❑ Em princípio, estas teorias se puderem ser formuladas, deverão ser mais relevantes para a Física pois parece-nos lógico que dois experimentadores em laboratórios diferentes possam fazer escolhas diferentes das convenções e obter os mesmos resultados físicos.
- ❑ Queremos portanto teorias em que o lagrangeano seja invariante debaixo de transformações de simetria interna mas que dependem do ponto do espaço tempo.

- Estas teorias existem e são as denominadas teorias com *invariância padrão* ou *teorias de gauge* na designação inglesa. Usaremos esta última designação por ser a mais corrente entre os físicos.
- Pedir que uma teoria possua invariância local é uma condição muito restritiva. De facto se tivermos uma teoria que tenha uma dada invariância global, normalmente não será possível torná-la localmente invariante sem adicionar mais qualquer coisa.
- Consideremos como exemplo o caso do campo de Dirac. O lagrangeano é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

- Esta teoria é invariante quando efetuamos transformações de fase constantes. Vamos ver o que se passa quando as transformações são locais, isto é, a escolha de fase é independente em cada ponto do espaço-tempo, e para simplificar vamos considerar transformações infinitesimais,

$$\delta\psi = e^{i\alpha(x)}\psi - \psi \quad \Rightarrow \quad \delta\psi = i\alpha(x)\psi \quad ; \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha(x)\bar{\psi}$$

- Temos então

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -i\alpha(x)\bar{\psi}(i\partial - m)\psi + i\alpha(x)\bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}$$

- Portanto o lagrangeano deixa de ser invariante. É fácil de ver que o problema está ligado ao facto de $\partial_\mu\psi$ não se transformar como ψ . Assim introduzimos o conceito de *derivada covariante* D_μ tal que numa transformação de gauge, se transforme como os campos, isto é

$$\delta(D_\mu\psi) = i\alpha(x)D_\mu\psi$$

- Definimos a derivada covariante pela relação

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

e vamos ver que transformações deve ter o campo vetorial A_μ . Obtemos

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi) &= \delta(ieA_\mu)\psi + D_\mu(\delta\psi) \\ &= ie\delta A_\mu\psi + \partial_\mu(i\alpha(x)\psi) + ieA_\mu(i\alpha(x)\psi) \\ &= i\alpha(x)D_\mu\psi + ie\delta A_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)\psi\end{aligned}$$

- Agora comparando as expressões anteriores obtemos a lei de transformação do campo vetorial A_μ

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

- Esta lei de transformação é exatamente uma transformação de gauge do eletromagnetismo se A_μ for interpretado como o campo do fóton. Assim vemos que o campo vetorial A_μ representa a força de que tínhamos falado anteriormente que assegura que podemos escolher a fase de maneira diferente em diferentes pontos do espaço tempo.
- A introdução do campo A_μ força a introdução de novos termos no lagrangeano, em particular os termos de energia cinética para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo A_μ que é invariante para as transformações de gauge é o tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- De facto obtemos trivialmente

$$\delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{e} (\partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) - \partial_\nu \partial_\mu \alpha(x)) = 0$$

- Por outro lado termos de massa da forma $A^\mu A_\mu$ não são invariantes exigindo que o fóton não tenha massa. Portanto o lagrangeano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\ &\equiv \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interacção}}\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{interacção}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$$

é invariante para as transformações de fase locais

- Diz-se que é uma teoria com invariância de gauge. O lagrangeano acima descreve a interação dos eletrões com os fótons. É chamada eletrodinâmica quântica (QED).

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

[Regras de Feynman](#)

- Para aplicação posterior recordemos aqui os passos que nos levaram até ela.
 - ◆ *Tínhamos uma teoria que era invariante para transformações globais. Neste caso o grupo de transformações era abeliano, multiplicação por uma fase, $U(1)$.*
 - ◆ *O requisito que a invariância se mantivesse quando as transformações fossem locais levou-nos à introdução dum novo campo, o fóton A_μ , com transformações univocamente dadas por essa condição. Fisicamente é o fóton que assegura que as diversas escolhas de fase são consistentes.*
 - ◆ *Foi necessário introduzir um novo termo no lagrangeano para nos dar a propagação dos fótons livres. Este termo deve possuir invariância de gauge.*
- Vamos ver agora como generalizar estes passos para grupos mais complicados do que a multiplicação por uma fase.

- Os mesmos passos que nos levaram a QED podem ser dados quando o grupo de transformações das fases é não abeliano.
- Neste caso dizemos que temos uma teoria não abeliana com invariância de gauge ou teoria de *Yang-Mills*, embora este nome se devesse só aplicar ao caso em que o grupo é $SU(2)$. Como alguns conceitos têm que ser generalizados vamos ver os passos em detalhe.
- Começamos pelo lagrangeano para campos fermiônicos generalizando QED. Seja

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

onde Ψ é um vetor coluna (cada ψ_i é um spinor de Dirac com 4 componentes)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

num espaço vetorial de dimensão n

- Neste espaço atua uma representação do grupo não abeliano G

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a(x)\Omega^a\Psi, \quad a = 1, 2, \dots, m$$

Ω^a são m matrizes hermíticas $n \times n$ que obedecem às relações de comutação de G ,

$$[\Omega^a, \Omega^b] = if^{abc}\Omega^c$$

sendo f^{abc} as constantes de estrutura de G . Desta relação resulta que m é a dimensão da representação adjunta de G , pois esse é também o número de geradores do grupo que obedecem à mesma álgebra

- O lagrangeano não é invariante sob a ação das transformações locais. Para o tornar invariante introduzimos a derivada covariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu^a\Omega^a)\Psi$$

onde A_μ^a são m campos vetoriais, que vão desempenhar um papel análogo ao do fóton no eletromagnetismo, e que são designados por *campos de gauge*.

- As matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação de Ψ de dimensão n . A lei de transformação de A_μ^a é obtida pelo requisito de que $D_\mu \Psi$ se transforme como Ψ .

- Para a calcular introduzimos a notação compacta

$$\underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon^a \Omega^a, \quad \underline{A}_\mu \equiv A_\mu^a \Omega^a$$

onde $\underline{\varepsilon}$ e \underline{A}_μ são matrizes $n \times n$ e funções de (\vec{x}, t) . Então

$$\delta \Psi = i \underline{\varepsilon} \Psi$$

- Calculemos então a variação de $D_\mu \Psi$. Obtemos

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \Psi) &= \partial_\mu(\delta \Psi) + ig \underline{A}_\mu (\delta \Psi) + ig (\delta \underline{A}_\mu) \Psi \\ &= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi + i (\partial_\mu \underline{\varepsilon} \Psi) - g \underline{A}_\mu \underline{\varepsilon} \Psi + ig (\delta \underline{A}_\mu) \Psi \end{aligned}$$

- Nós queremos que

$$\delta(D_\mu \Psi) = i \underline{\varepsilon} D_\mu \Psi = i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi - g \underline{\varepsilon} \underline{A}_\mu \Psi$$

[Sumário](#)
[Mecânica Clássica](#)
[Teoria de Campo](#)
[O Eletromagnetismo](#)
[Teorias de Yang-Mills](#)

- **Transformações**

- Derivada Covariante

- $SU(2) \times U(1)$

[Regras de Feynman](#)

- Comparando as equações anteriores obtemos

$$\delta \underline{A}_\mu = i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon}$$

que é a transformação dos campos de gauge escrita numa forma matricial.

- Em termos das componentes A_μ a equação anterior escreve-se

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a$$

- Notar que no caso do grupo ser abeliano as expressões acima se reduzem ao caso abeliano do eletromagnetismo pois $f^{abc} = 0$. Nesse caso $m = 1$.

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

• Transformações

• **Derivada Covariante**

• $SU(2) \times U(1)$

[Regras de Feynman](#)

- A derivada covariante tem algumas propriedades importantes para o seguimento e que vamos aqui indicar.

1. A derivada covariante pode ser escrita na forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g A_\mu^a \frac{\delta \Phi}{\delta \varepsilon^a}$$

para um campo arbitrário Φ , fermiónico ou bosónico. Esta expressão permite-nos escrever a derivada covariante de qualquer campo, ou funções de campos, desde que se saibamos as suas propriedades de transformação.

2. A derivada dum produto pode ser facilmente calculada a partir de

$$\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi$$

Então obtemos

$$D_\mu(\phi\psi) = (D_\mu\phi) \psi + \phi D_\mu\psi$$

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

• Transformações

• Derivada Covariante

• $SU(2) \times U(1)$

[Regras de Feynman](#)

3. O comutador de duas derivadas covariantes pode ser facilmente calculado.

□ De facto não é zero, nem mesmo para um grupo abeliano. Obtemos

$$\begin{aligned} (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi &= (\partial_\mu + ig \underline{A}_\mu)(\partial_\nu + ig \underline{A}_\nu) \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= ig (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]) \Psi \end{aligned}$$

□ Portanto

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = ig \underline{F}_{\mu\nu} \Psi$$

onde $\underline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a \Omega^a$ é definido por

$$\underline{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]$$

□ Vemos assim que $\underline{F}_{\mu\nu}$ é a generalização para o caso não abeliano do tensor de Maxwell.

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

• [Transformações](#)

• [Derivada Covariante](#)

• [SU\(2\) × U\(1\)](#)

[Regras de Feynman](#)

- Podemos verificar que $\underline{F}_{\mu\nu}$ se transforma numa forma covariante (não é invariante) para as transformações dos campos de gauge,

$$\begin{aligned} \delta(\underline{F}_{\mu\nu}) &= \partial_\mu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - \frac{1}{g} \partial_\nu \underline{\varepsilon} \right) - \partial_\nu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \right) \\ &\quad - g [[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu], \underline{A}_\nu] - i [\partial_\mu \underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - g [\underline{A}_\mu, [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu]] - i [\underline{A}_\mu, \partial_\nu \underline{\varepsilon}] \\ &= i [\underline{\varepsilon}, \underline{F}_{\mu\nu}] \end{aligned}$$

- Contrariamente ao caso abeliano, $\underline{F}_{\mu\nu}$ não é invariante. De facto transforma-se como um vetor num espaço de dimensão m (a dimensão do grupo), isto é

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -f^{bca} \varepsilon^b F_{\mu\nu}^c$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{bca} A_\mu^b A_\nu^c$$

- A lei de transformação dos campos de gauge, permite mostrar que a generalização do lagrangeano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

é invariante para as transformações de gauge

- Juntando todas as peças, concluímos que a generalização do lagrangeano que possui invariância de gauge local é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} .$$

- Antes de acabarmos esta secção vamos fazer alguns comentários sobre o que acabámos de ver e as suas aplicações.

- Primeiro que tudo o lagrangeano anterior descreve uma teoria física para uma das interações fundamentais da Natureza, quando o grupo G é $SU(3)$. É a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as interações fortes.
- Nessa teoria os campos de matéria são os *quarks* que se encontram na representação fundamental do grupo (tripletos de $SU(3)$) e os campos de gauge são os *gluões* que se encontram na representação adjunta de $SU(3)$ que é aquela que tem a mesma dimensão que o grupo (8 para $SU(3)$).
- Outra observação tem que ver com a massa para os campos de gauge. Um termo de massa para os campos de gauge teria a forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$$

e é fácil de ver que as transformações de gauge não deixam o lagrangeano invariante. Assim o fóton e os gluões aparecem como partículas sem massa.

- Contudo para as interações fracas este facto levanta problemas pois nós sabemos que devido ao seu curto alcance, os portadores da força fraca devem ter massa. Este problema que persistiu na física de partículas durante várias décadas só foi resolvido com a quebra espontânea da simetria e o mecanismo de Higgs que veremos mais tarde

- Finalmente um comentário sobre o caso do grupo G não ser *simples*, por exemplo

$$G = SU(2) \times U(1)$$

- Neste caso a generalização obtém-se do modo seguinte. Para os campos de matéria o lagrangeano tem a mesma forma mas a derivada covariante é agora uma soma sobre todos os campos de gauge com uma constante de acoplamento por cada grupo fator. O lagrangeano para os campos de gauge é simplesmente a soma de lagrangeanos para cada grupo fator.
- Para dar um exemplo concreto vamos considerar o grupo $G = SU(2) \times U(1)$ que como veremos mais à frente vai ser precisamente o caso do modelo standard das interações eletrofracas. Neste caso o lagrangeano será,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - m) \Psi_f - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

onde a soma é sobre todos os fermiões da teoria.

[Sumário](#)

[Mecânica Clássica](#)

[Teoria de Campo](#)

[O Eletromagnetismo](#)

[Teorias de Yang-Mills](#)

• Transformações

• Derivada Covariante

• **$SU(2) \times U(1)$**

[Regras de Feynman](#)

- Os campos de gauge introduzidos são convencionalmente designados por W_μ^a para $SU(2)$ e B_μ para $U(1)$, com os tensores do campo dados por

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{bca} W_\mu^b W_\nu^c$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

- A derivada covariante tem agora uma contribuição de cada campo de gauge com uma constante de acoplamento diferente. Assim temos,

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + ig' Y B_\mu \right) \Psi$$

onde $\Omega^a = \frac{\sigma^a}{2}$ para $SU(2)$ e Y , designada por hipercarga, uma matriz proporcional à matriz identidade para o grupo $U(1)$. Voltaremos a este assunto mais à frente

- Vamos dar aqui as regras de Feynman para uma teoria não abeliana

- **Propagadores**

Comecemos pelos propagadores. Aqui não há nada de novo, para além do facto que agora temos m campos de gauge. A estrutura dos termos quadráticos é a mesma que a teoria de Dirac e de Maxwell e portanto obtemos (na gauge de Feynman)

$$\mu, a \quad \text{~~~~~} \quad \nu, b \quad \quad -i\delta_{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$$

$$\begin{array}{c} \text{—————} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2}$$

- Sumário
- Mecânica Clássica
- Teoria de Campo
- O Eletromagnetismo
- Teorias de Yang-Mills
- Regras de Feynman
 - Propagadores
 - Vértices

- Sumário
- Mecânica Clássica
- Teoria de Campo
- O Eletromagnetismo
- Teorias de Yang-Mills
- Regras de Feynman
 - Propagadores
 - **Vértices**

□ Vértices

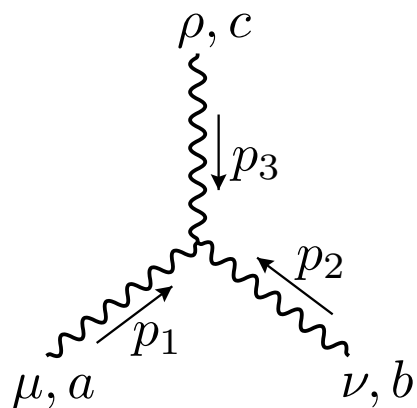
Os vértices vêm dos termos com três ou mais campos no lagrangeano.

Obtemos

$$\mathcal{L}_{int} = g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} - g \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j \Omega_{ij}^a A_\mu^a$$

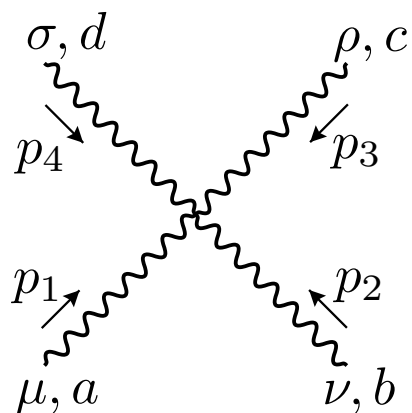
o que conduz a interações com três e quatro campos de gauge, que não existiam em QED, para além da generalização da interação entre fermiões e campos de gauge.

□ Interações triplas de campos de gauge



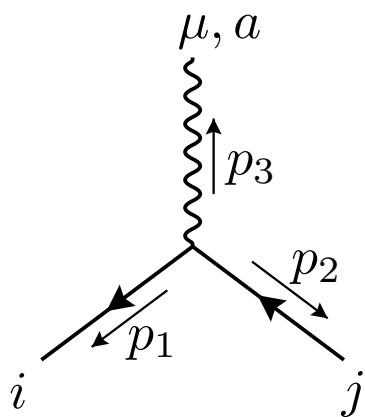
$$-g f^{abc} [g^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\rho + g^{\nu\rho} (p_2 - p_3)^\mu + g^{\rho\mu} (p_3 - p_1)^\nu]$$

□ Interações quárticas de campos de gauge



$$\begin{aligned}
 & -ig^2 \left[f_{eab} f_{ecd} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \right. \\
 & \quad + f_{eac} f_{edb} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) \\
 & \quad \left. + f_{ead} f_{ebc} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \right]
 \end{aligned}$$

□ Interações de fermiões com campos de gauge



$$-i g \gamma^\mu \Omega_{ij}^a$$