

Física de Partículas
Aula 7
As Interações Fracas: do Modelo de Fermi
à Teoria V-A

Jorge C. Romão
Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

2014

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

Problemas

Formulary

- A teoria de Fermi
- A teoria V-A
 - ◆ Violação de paridade nas interações fracas
 - ◆ Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica
 - ◆ A interação corrente-corrente de Feynman e Gell-Mann
- As interações fracas dos hadrões
 - ◆ Universalidade e a teoria de Cabibbo
 - ◆ O mecanismo de GIM e a descoberta do charm
- A hipótese do bóson vetorial intermédio
- Problemas com a teoria corrente-corrente
 - ◆ Violação da unitariedade na interação de Fermi
 - ◆ Violação de unitariedade no modelo IVB

A teoria de Fermi

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

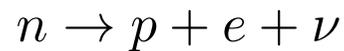
[A teoria V-A](#)

[Hadrões](#)

[Problemas](#)

[Formulary](#)

- A teoria das interações fracas começou com a teoria de Fermi para o decaimento β do neutrão

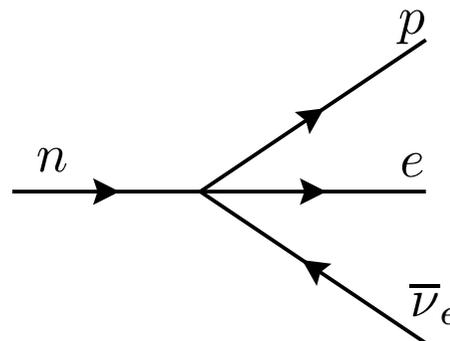


Na altura eram conhecidos o protão, o neutrão, o eletrão e o neutrino que foi precisamente introduzido, por Pauli em 1930, para que a conservação da energia fosse satisfeita.

- Para explicar o decaimento β Fermi, em 1934, introduziu o seguinte lagrangeano (analogia com o eletromagnetismo)

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu + \text{h.c.}$$

que corresponde ao diagrama de Feynman



A teoria de Fermi

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

[A teoria V-A](#)

[Hadrões](#)

[Problemas](#)

[Formulary](#)

- Com este lagrangeano pode-se calcular a largura do decaimento. Obtemos para a amplitude

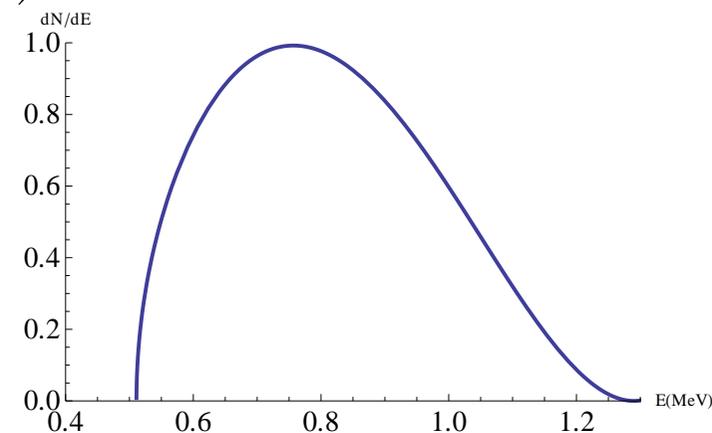
$$\mathcal{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\alpha u(p) \bar{u}(k) \gamma_\alpha v(q_2)$$

- De facto não podemos descrever os nucleões por ondas planas, mas temos que usar funções de onda nucleares. Isto resulta nalguma complicação em que não vamos aqui entrar.
- Com algumas aproximações obtemos para o espectro de energia do eletrão emitido

$$N(E) = \frac{d\Gamma}{dE} = \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2$$

onde E é a energia do eletrão e

$$\Delta = m_n - m_p$$



- Para a largura total vem então

$$\Gamma = \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \int_{m_e}^{\Delta} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2$$

$$= 3.6 \times 10^{-3} G_\beta^2 \quad (\text{Todas as grandezas em MeV})$$

- Conhecendo o tempo de vida média do neutrão ($\tau_n = 880$ s) obtinha-se um valor para G_β

$$G_\beta \simeq 1.4 \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2} = 1.4 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$$

- Este cálculo é aproximado pois estamos a desprezar o facto de que o neutrão é um estado ligado. Essas correções levam o valor de G_β para baixo cerca de 20%
- Notar que o valor de G_β é ajustado para se obter o valor de Γ . O sucesso da teoria estava em prever um espectro $N(E)$ em acordo com o que era na altura medido.

- Depois do sucesso da teoria de Fermi, procurou-se estender o método a outros decaimentos radioativos.

- Para isso foi importante notar que o lagrangeano se pode escrever na forma

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J_p^\alpha J_{e\alpha} + \text{h.c.}$$

onde J_e^α e J_p^α são as *correntes* definidas por

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu, \quad J_p^\alpha = \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n$$

- Estas correntes são semelhantes à corrente eletromagnética em QED. Como vimos numa aula anterior estas correntes têm um carácter vetorial, isto é, numa transformação de Lorentz transformam-se como um vetor.
- O lagrangeano assim construído é portanto um escalar de Lorentz.

- Mas em 1936 Gamow e Teller mostraram que a forma anterior não é única e que o lagrangeano escalar mais geral deveria ser da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & c_1 \bar{\psi}_p \psi_n \bar{\psi}_e \psi_\nu & S \times S \\
 & + c_2 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu & V \times V \\
 & + c_3 \bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n \bar{\psi}_e \sigma_{\alpha\beta} \psi_\nu & T \times T \\
 & + c_4 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu & A \times A \\
 & + c_5 \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu & P \times P
 \end{aligned}$$

e os coeficientes c_i só podem ser determinados pela experiência.

- Nesta equação estão indicadas as propriedades de transformação para transformações de Lorentz dos diferentes termos.
- Gamow e Teller mostraram que no limite não relativista se obtém

$$SS, VV \rightarrow \Delta J = 0, \quad AA, TT \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1$$

- Portanto, enquanto que a descrição de Fermi ($V \times V$) poderia explicar transições com $\Delta J = 0$, alguma parte de $A \times A$ ou $T \times T$ deverá estar presente para explicar as transições com $|\Delta J| = 1$. Um grande trabalho experimental foi então empreendido para determinar os coeficientes c_i .

- Todo o trabalho anterior foi feito tendo como hipótese de base que a Paridade era conservada nas interações fracas. Contudo, como vimos antes, em 1956 Lee e Yang mostraram que esta ideia devia ser abandonada para explicar o chamado $\tau - \theta$ puzzle.

- Este consistia em compreender porque é que os dois decaimentos

$$\theta : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \quad \tau : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$$

podiam ocorrer simultaneamente quando as paridades dos dois estados finais eram diferentes, isto é

$$P(\pi^+ \pi^0) = +1 \quad ; \quad P(\pi^+ \pi^+ \pi^-) = -1$$

- Isto poderia acontecer se a Paridade não fosse conservada nas interações fracas. Isto foi demonstrado na experiência de Wu
- Assim a construção de Gamow e Teller tem que ser modificada para incluir, por exemplo, termos da forma $V \times A$,

$$\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu$$

Era preciso recomeçar do início e comparar com a experiência de novo.

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

[A teoria V-A](#)

• [Gamow & Teller](#)

• [Violação de paridade](#)

• **[Neutrinos esquerdos](#)**

• [Feynman & Gell-Mann](#)

[Hadrões](#)

[Problemas](#)

[Formulary](#)

- Nesta busca experimental que levou à descoberta da violação da Paridade nas interações fracas uma descoberta importante que foi feita diz respeito aos neutrinos, nomeadamente que eles têm helicidade negativa.
- Como o projetor da helicidade negativa é (para neutrinos sem massa helicidade e quiralidade são a mesma coisa)

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

isto quer dizer que

$$\psi_\nu = P_L \psi_\nu$$

- Como consequência disto a corrente leptónica para o eletrão deverá ser

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}$$

o que também foi confirmado experimentalmente. Convém aqui notar que para uma partícula qualquer com massa, como o eletrão, se pode sempre escrever

$$\psi_e = P_L \psi_e + P_R \psi_e$$

- Então a estrutura da corrente leptónica mostra que só a componente esquerda do eletrão participa na interação. De facto

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L \psi_\nu &= \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L^2 \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \\ &= \psi_e^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \overline{(P_L \psi_e)} \gamma^\alpha P_L \psi_\nu\end{aligned}$$

- Se tivermos uma interação geral da forma $V - A$

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi$$

e se introduzirmos

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R\end{aligned}$$

pois os termos cruzados são nulos.

- Mostremos isso para um deles. Obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R &= \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_L P_R \psi = 0\end{aligned}$$

- onde se usaram as propriedades de ortogonalidade dos projetores P_L e P_R .
- Isto quer dizer que uma corrente vetorial ou vetorial axial conserva a helicidade. Por outras palavras quer também dizer que pode ser construída para partículas que tenham só uma helicidade, como é o caso dos neutrinos.
- O mesmo não se passa para o termo de massa. O termo de massa usual é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{massa}} &= -m \bar{\psi} \psi = -m (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (\psi_L + \psi_R) \\ &= -m \bar{\psi}_L \psi_R - m \bar{\psi}_R \psi_L\end{aligned}$$

pois

$$\bar{\psi}_L \psi_L = \overline{(P_L \psi)} P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 P_L \psi = \psi^\dagger \gamma^0 P_R P_L \psi = 0$$

e de igual modo para $\bar{\psi}_R \psi_R$. Como conclusão, o neutrino não poderá ter um termo de massa do tipo acima indicado

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

• Gamow & Teller

• Violação de paridade

• Neutrinos esquerdos

• Feynman & Gell-Mann

Hadrões

Problemas

Formulary

- Fazendo a síntese de todo o trabalho iniciado com a teoria de Fermi, em 1958 Feynman e Gell-Mann propuseram que as interações fracas deveriam ser descritas pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger}, \quad \text{onde} \quad J^\mu = \ell^\mu + h^\mu$$

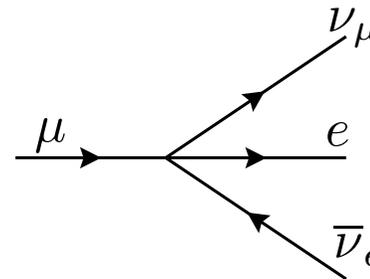
sendo ℓ^μ e h^μ as partes leptónica e hadrónica dessa corrente.

- Os resultados experimentais mostraram que a estrutura da corrente leptónica deveria ser do tipo $V - A$, isto é

$$\ell^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\tau}$$

- Quando a teoria foi proposta não existia o τ . Mas experimentalmente foi verificado que a estrutura para o τ era a mesma e que a intensidade relativa das três partes da corrente era igual. Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. A constante G_F é de facto ligeiramente diferente de G_β da teoria de Fermi, devido às complicações de física nuclear no decaimento do neutrão

- O seu valor podia ser determinado calculando o decaimento do muão descrito pelo diagrama da figura seguinte e que não tem as complicações da física hadrónica referidas a propósito do decaimento do neutrão.



- A amplitude é

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(q_2)$$

- Um cálculo simples dá (desprezando m_e),

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

donde se conclui que

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- A parte hadrónica da corrente fraca, h^α , será estudada mais adiante. Vejamos aqui com um pouco mais de detalhe a corrente leptónica. Para isso notemos primeiro que podemos escrever

$$\ell^\alpha = 2\bar{\psi}_L(e)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_e) + 2\bar{\psi}_L(\mu)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\mu) + 2\bar{\psi}_L(\tau)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\tau)$$

isto é, a corrente escreve-se completamente em termos das componentes esquerdas dos campos.

- Definimos agora um *isospin esquerdo* para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num dubleto da forma

$$\chi_L(e) \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$$

- Então a corrente leptónica escreve-se

$$\ell^\alpha = 2 \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) + \bar{\chi}_L(\mu)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\mu) + \bar{\chi}_L(\tau)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\tau) \right]$$

onde

$$\bar{\chi}_L(e) = \left[\bar{\nu}_e, \bar{e} \right], \dots \quad \text{e} \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2)$$

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

- Gamow & Teller
- Violação de paridade
- Neutrinos esquerdos
- Feynman & Gell-Mann

Hadrões

Problemas

Formulary

- Notar que

$$\tau^- \chi_L(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L$$

- Somos assim tentados a definir uma corrente de isospin esquerdo através de

$$j_L^{i\alpha} = \frac{1}{2} [\overline{\chi}_L(e) \gamma^\alpha \tau^i \chi_L(e) + \dots]$$

- Então se introduzirmos a notação

$$j_L^{\pm\alpha} \equiv \frac{j_L^{1\alpha} \pm i j_L^{2\alpha}}{\sqrt{2}}$$

vemos que

$$\ell^\alpha = 2\sqrt{2} (j_L^-)^\alpha, \quad \ell^{\alpha\dagger} = 2\sqrt{2} (j_L^+)^\alpha$$

- Estamos a introduzir um formalismo adaptado a $SU_L(2)$ mas o lagrangeano inicial não é invariante para esse grupo pois falta o termo $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$.

- De facto considerando só a parte do eletrão e seu neutrino obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lep} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_L(e) \gamma^\alpha \tau^- \chi_L(e) \bar{\chi}_L(e) \gamma_\alpha \tau^+ \chi_L(e) \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_L^{1\alpha} j_{L\alpha}^1 + j_L^{2\alpha} j_{L\alpha}^2) \end{aligned}$$

pois

$$(\tau^-)_{ij} (\tau^+)_{kl} = (\tau^1)_{ij} (\tau^1)_{kl} + (\tau^2)_{ij} (\tau^2)_{kl}$$

- Dito de outro modo, todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada pois $\Delta Q \neq 0$. Um termo como $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$ que faria o lagrangeano invariante para transformações de $SU_L(2)$, implicaria a existência de correntes fracas neutras, o que só viria a ser descoberto mais tarde.
- Vemos assim que a parte leptónica do lagrangeano de Feynman e Gell-Mann sugeria já que o grupo de simetria fosse $SU_L(2)$ e a descoberta das correntes neutras veio confirmá-lo, como discutiremos mais à frente

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

[A teoria V-A](#)

[Hadrões](#)

● [Teoria de Cabibbo](#)

● [GIM](#)

● [A hipótese do IVB](#)

[Problemas](#)

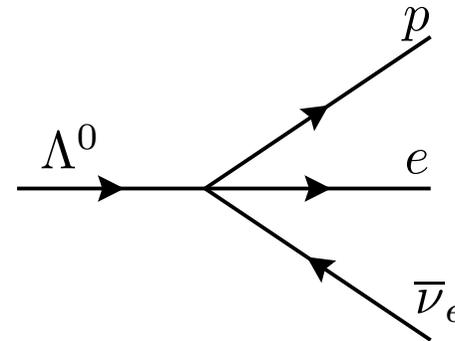
[Formulary](#)

- As interações fracas dos hadrões são um pouco mais complicadas. Parte dessa complicação resulta, claro, das próprias interações fortes e da sua propriedade de *confinamento*, que quer dizer que a teoria fundamental é simples de escrever em termos dos quarks mas que estes não são partículas livres, só aparecendo na natureza como estados ligados.
- Assim todos os cálculos de interações com hadrões são muito difíceis. Nós apresentaremos primeiro os resultados em termos das correntes dos hadrões (que é a via histórica), mas depois traduziremos esses resultados para o lagrangeano ao nível dos quarks.
- Do ponto de vista das interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrónicas. O primeiro é relevante para o decaimento β do neutrão. Dizemos que este decaimento corresponde a $\Delta S = 0$, isto é não há variação do número quântico estranheza (é zero para todas as partículas envolvidas).

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[● Teoria de Cabibbo](#)
[● GIM](#)
[● A hipótese do IVB](#)
[Problemas](#)
[Formulary](#)

- Há no entanto outro tipo de decaimentos em que $\Delta S = \pm 1$, como por exemplo

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$$



- A parte da corrente leptónica é igual, mas a parte hadrónica tem agora $\Delta S = 1$ ($\Lambda^0 = uds$). Além disso, a parte hadrónica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão.
- Os resultados experimentais podem ser resumidos da forma seguinte

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)}$$

onde tanto a parte $\Delta S = 0$, $h_\mu^{(0)}$, como a parte $\Delta S = 1$, $h_\mu^{(1)}$, têm a forma $V - A$

- Isto quer dizer que

$$h_{\mu}^{(0)} = V_{\mu}^{(0)} - A_{\mu}^{(0)}, \quad h_{\mu}^{(1)} = V_{\mu}^{(1)} - A_{\mu}^{(1)}$$

- Considerações de simetria relativas ao grupo $SU(3)$ para as interações fortes dos quarks u , d e s , levaram Cabibbo, em 1963, a propor que

$$g_V^2 + g_S^2 = 1$$

o que foi verificado experimentalmente. Em vez de g_V e g_S , é mais normal introduzir um ângulo designado por *ângulo de Cabibbo*, tal que

$$g_V = \cos \theta_c \quad ; \quad g_S = \sin \theta_c$$

- Experimentalmente verifica-se que

$$\sin \theta_c \simeq 0.22$$

- Em resumo o facto essencial é que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hadrónica.

- Sumário
- A teoria de Fermi
- A teoria V-A
- Hadrões
- Teoria de Cabibbo
 - GIM
 - A hipótese do IVB
- Problemas
- Formulary

- Mais concretamente se tomarmos a corrente leptónica como referência temos que a intensidade relativa das diferentes correntes é

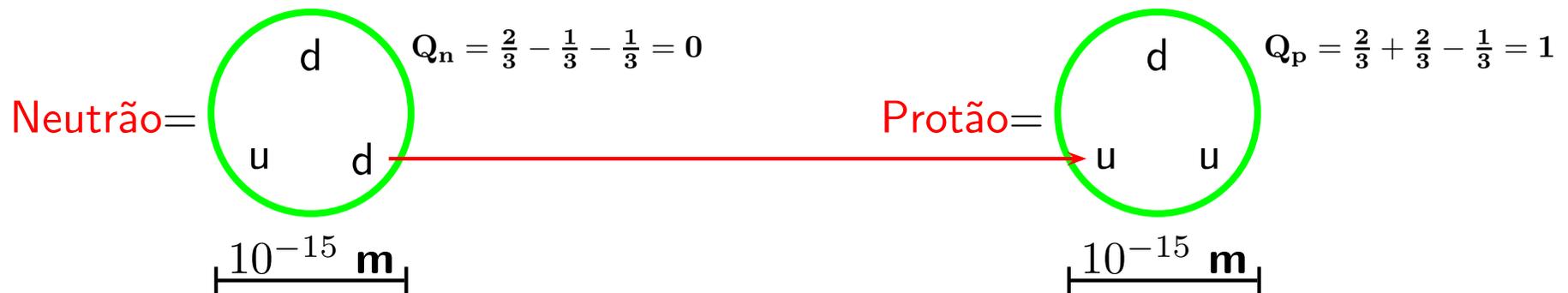
Corrente	Intensidade
l_α	1
$h_\alpha^{(0)}$	$\cos \theta_c$
$h_\alpha^{(1)}$	$\sin \theta_c$

o que mostra que a universalidade é menos perfeita no sector hadrónico.

- Estes factos permitem-nos descrever agora as correntes hadrónicas ao nível dos quarks. A corrente hadrónica tem então a forma seguinte

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d + \sin \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_s .$$

- A ideia é que a interação que transforma um neutrão num protão



deve ser aquela que leva um quark $d \rightarrow u$ ($\Delta Q = 1$)

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

● Teoria de Cabibbo

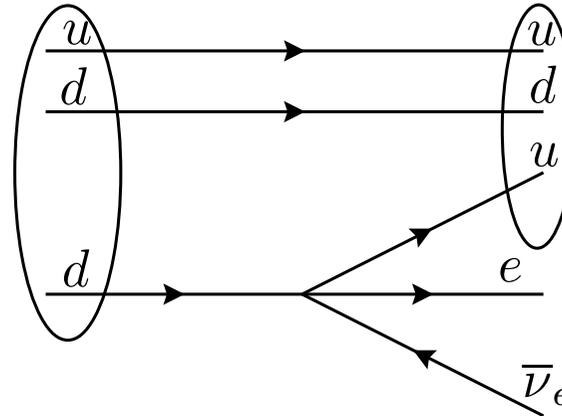
● GIM

● A hipótese do IVB

Problemas

Formulary

- Em termos de quarks o decaimento β seria, nesta aproximação, dado por



- Claro que o confinamento torna esta descrição demasiado simplista, mas a hipótese é que a estrutura da teoria ao nível do lagrangeano em termos de quarks está correta.
- Não nos preocupando mais com as complicações das interações fortes, vejamos melhor a estrutura em termos dos campos dos quarks. Como o u e d diferem duma unidade de carga, as correntes $h_\alpha^{(0)}$ e $h_\alpha^{(1)}$ são correntes carregadas, tal como acontecia para a corrente leptónica.
- Por outro lado são também correntes esquerdas. Vejamos se é possível dar-lhes uma forma onde apareçam sinais do grupo $SU_L(2)$.

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)

- [Teoria de Cabibbo](#)

- [GIM](#)

- [A hipótese do IVB](#)

[Problemas](#)
[Formulary](#)

- Para isso observemos que

$$\begin{aligned}
 h^\alpha &= \cos \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s \\
 &= \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c)
 \end{aligned}$$

onde passámos a representar os campos pelo seu nome, isto é, por exemplo para o quark u , $u \equiv \psi_u$.

- Se olharmos para a equação anterior somos levados a introduzir um dubleto de quarks da forma

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L$$

onde

$$d_c \equiv d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$$

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[● Teoria de Cabibbo](#)
[● GIM](#)
[● A hipótese do IVB](#)
[Problemas](#)
[Formulary](#)

- Então a corrente pode ser escrita na forma

$$h^\alpha = 2\bar{Q}_L \gamma^\alpha \tau^+ Q_L$$

onde

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2}$$

- Nesta equação o índice L quer dizer, como anteriormente,

$$Q_L = \begin{pmatrix} P_L u \\ P_L d_c \end{pmatrix} .$$

- Mais uma vez para que o lagrangeano tenha invariância para $SU_L(2)$ falta a componente neutra

$$h^{3\alpha} = 2\sqrt{2}\bar{Q}_L \gamma^\alpha \tau^3 Q_L$$

- Como vimos a teoria de Cabibbo para as correntes carregadas permite escrever a corrente hadrónica carregada através de

$$h_{\alpha}^{+} = 2\bar{Q}_L \gamma_{\alpha} \tau^{+} Q_L \quad ; \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix}$$

onde o sinal + em h_{α}^{+} quer dizer que a corrente aumenta a carga por uma unidade, isto é

$$\Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1$$

- De igual modo podemos introduzir a corrente que diminui a carga por uma unidade,

$$h_{\alpha}^{-} = 2\bar{Q}_L \gamma_{\alpha} \tau^{-} Q_L$$

e portanto o lagrangeano para a parte hadrónica será (para os quarks u, d, s)

$$\mathcal{L}_{\text{had}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_{\alpha} h^{\alpha\dagger} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_{\alpha}^{-} h^{+\alpha} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_{\alpha}^1 h^{1\alpha} + h_{\alpha}^2 h^{2\alpha})$$

- Onde definimos

$$h_{\alpha}^i = \bar{Q}_L \gamma_{\alpha} \tau^i Q_L \quad ; \quad i = 1, 2$$

- Tal como para o sector leptónico somos levados a pensar se não falta o termo $h_{\alpha}^3 h^{3\alpha}$ para ter o lagrangeano invariante para $SU_L(2)$. Ora a corrente h_{α}^3 escreve-se

$$h_{\alpha}^3 = \bar{Q}_L \gamma_{\alpha} \tau^3 Q_L = \bar{u}_L \gamma_{\alpha} u_L - \bar{d}_{cL} \gamma_{\alpha} d_{cL}$$

- Esta corrente tem $\Delta Q = 0$, é portanto uma corrente neutra. A questão é então saber se existem correntes neutras nas interações fracas hadrónicas
- Experimentalmente verificou-se que sim, mas só com $\Delta S = 0$, isto é, não havia, ou eram extremamente suprimidas, as correntes neutras com mudança de estranheza. Isto põe um problema à interpretação acima pois o termo $\bar{d}_{cL} \gamma^{\alpha} d_{cL}$ contém partes com $\Delta S \neq 0$. De facto

$$\begin{aligned} \bar{d}_{cL} \gamma^{\alpha} d_{cL} &= \cos^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma^{\alpha} d_L + \sin^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma^{\alpha} s_L \\ &\quad + \sin \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma^{\alpha} s_L + \bar{s}_L \gamma^{\alpha} d_L) \end{aligned}$$

e o último termo tem $\Delta S \neq 0$.

- Portanto se quisermos insistir na simetria $SU_L(2)$ com a consequente introdução de h_α^3 , temos que resolver este problema.
- Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani resolveram esta questão postulando a existência dum segundo dubleto de $SU_L(2)$ onde apareceria um novo quark, c , de carga $Q = 2/3$, designado por *charm* e a combinação ortogonal a d_c designada agora por s_c ,

$$s_c = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad ; \quad Q = -1/3$$

- Designemos esse dubleto por

$$Q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix}$$

- Então a corrente neutra completa deverá ser

$$h_\alpha^3 = \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L + \bar{Q}'_L \gamma_\alpha \tau^3 Q'_L = \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L$$

pois os termos cruzados cancelam agora exatamente. A este mecanismo dá-se o nome de *mecanismo de GIM*.

- Na altura em que o quark c foi proposto não havia ainda evidência experimental para ele. Este facto foi atribuído por GIM a ele dever ser relativamente pesado.

- GIM não só propuseram o quark c como também forneceram uma estimativa para a sua massa. O argumento é o seguinte. Tomemos o decaimento

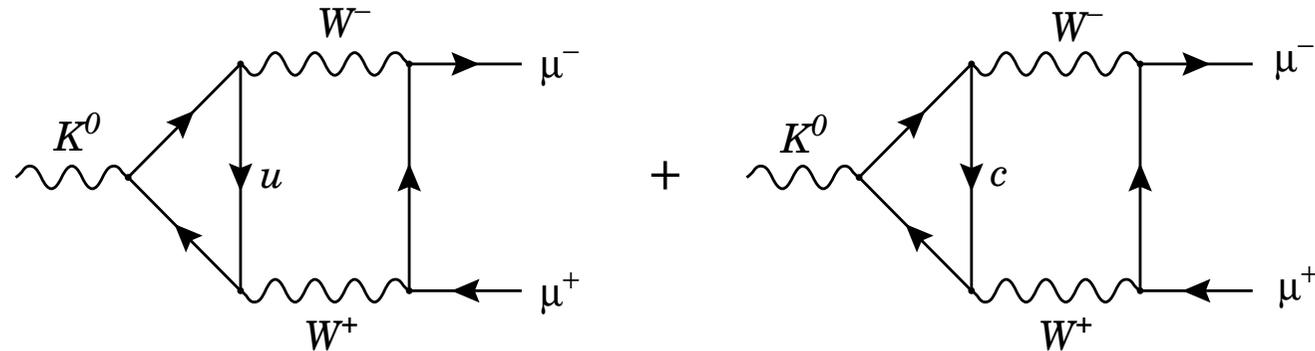
$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

É um decaimento com corrente neutra e $\Delta S \neq 0$ pelo que não deveria existir de acordo com o mecanismo de GIM. Na realidade não é assim e experimentalmente verifica-se que existe, embora seja extremamente raro. De facto

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \equiv \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{tudo})} = (6.3 \pm 1.1) \times 10^{-9}$$

- Como é que isto se enquadra no que dissemos acima? Muito simplesmente o mecanismo de GIM proíbe interações de corrente neutra com $\Delta S \neq 0$ somente ao nível árvore. Em ordem superior tais processos poderão existir.

- Assim para este processo podemos ter os dois diagramas



- Comparando os acoplamentos nos vértices o diagrama com o quark u tem uma amplitude

$$M_u \propto \sin \theta_c \cos \theta_c$$

enquanto que o diagrama com o quark c tem a amplitude

$$M_c \propto -\sin \theta_c \cos \theta_c$$

- Tudo o mais é igual exceto a massa dos quarks. Se $m_u = m_c$ os dois diagramas cancelariam exatamente dando uma contribuição zero em conflito com o resultado experimental

[Sumário](#)[A teoria de Fermi](#)[A teoria V-A](#)[Hadrões](#)[• Teoria de Cabibbo](#)[• GIM](#)[• A hipótese do IVB](#)[Problemas](#)[Formulary](#)

- Se $m_c \gg m_u$ o segundo diagrama será muito pequeno (não esquecer a massa no denominador do propagador do quark) e GIM calcularam que a contribuição do primeiro diagrama era demasiado grande para comparar com o valor observado experimentalmente.
- Para satisfazer o valor experimental a massa do quark c deveria estar num intervalo não muito largo. Eles encontraram

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV}$$

em comparação com o valor hoje aceite

$$m_c = 1.4 \text{ GeV}$$

- Mais uma vez a via da simetria obtinha resultados importantes. Com o mecanismo de GIM é possível promover a simetria da parte hadrónica do lagrangeano fraco ao grupo $SU_L(2)$.

A hipótese do bóson vetorial intermédio

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

• Teoria de Cabibbo

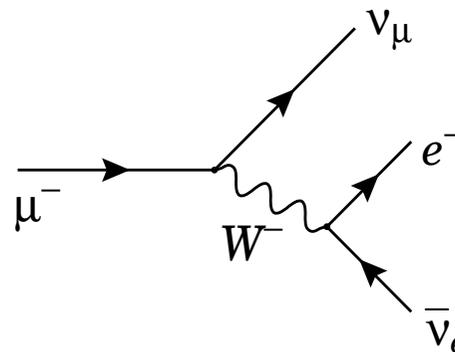
• GIM

• A hipótese do IVB

Problemas

Formulary

- Como vimos a teoria de Fermi foi motivada pela analogia com QED. Mas essa analogia é imperfeita pois não há o análogo do fóton, o portador da interação eletromagnética.
- Assim, desde muito cedo apareceu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas. Esse campo, designado por W , deveria ser também vetorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas.
- Na linguagem dos diagramas de Feynman, devíamos ter para o decaimento do muão o diagrama



- As interações fracas seriam então mediadas pelo W da mesma maneira que as interações eletromagnéticas são mediadas pelo fóton. Ao W foi dado na altura o nome de *Bosão Vetorial Intermédio* ou IVB atendendo às iniciais em inglês.

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

[A teoria V-A](#)

[Hadrões](#)

• [Teoria de Cabibbo](#)

• [GIM](#)

• [A hipótese do IVB](#)

[Problemas](#)

[Formulary](#)

- A ideia seria então que o lagrangeano seria substituído por um outro do tipo

$$\mathcal{L}_{weak} = g_w J_\mu W^\mu + \text{h.c.}$$

onde g_w é agora uma constante de acoplamento sem dimensões.

- Para tornar a teoria completa precisamos de saber o seu propagador. Para isso necessitamos da equação de onda para partículas de spin 1 com massa. Essa equação, designada por *equação de Proca* e escreve-se

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu = J^\mu$$

- O propagador é então a função de Green solução da equação

$$[(\square + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_F^{\nu\rho}(x - x') = ig^{\mu\rho} \delta^4(x - x')$$

- Passando para o espaço dos momentos obtemos

$$[(-k^2 + m^2)g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] G_F^{\nu\rho}(k) = ig^{\mu\rho}$$

A hipótese do bóson vetorial intermédio

- Obtemos então (ver Problemas)

$$G_F^{\nu\rho} = i \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{k^\nu k^\rho}{m^2}}{k^2 - m^2}$$

- Então o elemento de matriz para o decaimento do μ^- será da forma

$$\mathcal{M} = g_w^2 J_\mu G_F^{\mu\nu} J_\nu$$

e portanto se $k^2 \ll m_W^2$ devemos ter

$$G_F \simeq \frac{g_w^2}{m_W^2}$$

- Se $g \sim e$ então

$$m_W \sim e \sqrt{G_F} \sim 90 \text{ GeV}$$

o que justificaria a aproximação acima. Veremos mais à frente, no quadro do Modelo Standard, qual a relação exata entre G_F , g_w e m_W .

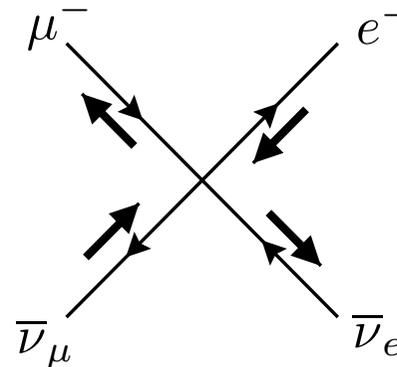
- Sumário
- A teoria de Fermi
- A teoria V-A
- Hadrões
 - Teoria de Cabibbo
 - GIM
 - A hipótese do IVB
- Problemas
- Formulary

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[Problemas](#)
[● Interação Fermi](#)
[● Modelo IVB](#)
[Formulary](#)

- Apresentámos nas secções anteriores uma teoria que descreve toda a fenomenologia conhecida das interações fracas em finais da década de sessenta.
- Contudo a teoria apresenta uma série de dificuldades que passamos a rever brevemente. Começemos pela interação pontual de 4 fermiões de Fermi (modificada por Feynman e Gell-Mann).
- Consideremos o processo

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$$

descrito neste modelo pelo diagrama



- Como os problemas que vamos exhibir ocorrem para $\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu$, vamos desprezar essas massas.

□ Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu P_L v(p_4) \end{aligned}$$

□ Como os antineutrinos têm helicidade positiva há só uma possibilidade de helicidades não nula,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2, \uparrow) \gamma^\mu u(p_1, \downarrow) \bar{u}(p_3, \downarrow) \gamma_\mu v(p_4, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} s(1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

onde usámos as expressões para as correntes discutidas anteriormente

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

Problemas

● Interação Fermi

● Modelo IVB

Formulary

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[Problemas](#)
[● Interação Fermi](#)
[● Modelo IVB](#)
[Formulary](#)

□ Portanto

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow)|^2 \\
 &= 4G_F^2 s^2 (1 + \cos \theta)^2
 \end{aligned}$$

□ A secção eficaz diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s (1 + \cos \theta)^2$$

□ A secção eficaz total será então

$$\sigma = \frac{G_F^2}{3\pi} s$$

[Sumário](#)[A teoria de Fermi](#)[A teoria V-A](#)[Hadrões](#)[Problemas](#)[● Interação Fermi](#)[● Modelo IVB](#)[Formulary](#)

- Mas por outro lado, a secção eficaz de difusão escreve-se na forma geral

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J + 1) |f_J|^2$$

onde k é o momento no centro de massa e f_J é a onda parcial correspondente ao momento angular J .

- Pode-se mostrar em geral, usando argumentos de unitariedade ou, o que é o mesmo, de conservação de probabilidade, que

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J \Rightarrow |f_J| \leq 1$$

- Obtemos portanto

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J + 1)}{k^2} = \frac{16\pi(2J + 1)}{s}$$

o que mostra que σ_J decresce com s .

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[Problemas](#)
[● Interação Fermi](#)
[● Modelo IVB](#)
[Formulary](#)

- Mas pode-se mostrar que este processo corresponde a $J = 1$ (ver Problemas) e para a secção eficaz não polarizada deveremos ter

$$\sigma \leq \frac{24\pi}{s}$$

o que entra em conflito com a expressão anterior para secção eficaz para

$$\sqrt{s} \geq 1.5 \times 10^3 \text{ GeV}$$

- A dificuldade com a teoria pontual pode ser relacionada com o facto da constante G_F ter dimensões. De facto

$$[G_F] = M^{-2}, \quad [\sigma] = L^2 = M^{-2}$$

e portanto a energias acima das massas dos leptões um argumento puramente dimensional dá

$$\sigma \sim G_F^2 s$$

dado que a secção eficaz deverá ser proporcional a G_F^2 . Isto foi exactamente o que encontrámos.

[Sumário](#)
[A teoria de Fermi](#)
[A teoria V-A](#)
[Hadrões](#)
[Problemas](#)

- [Interação Fermi](#)

- **[Modelo IVB](#)**

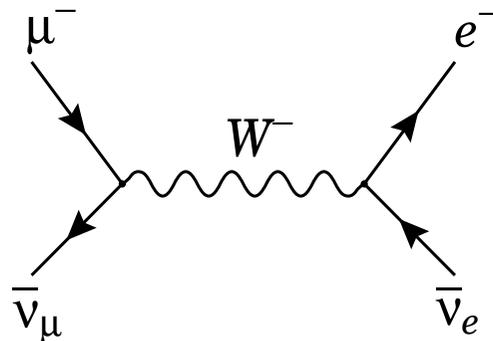
[Formulary](#)

- O argumento anterior podia levar-nos a pensar que a dificuldade desapareceria no modelo com o bóson vetorial intermédio (IVB). Isto porque aí

$$G_F \sim \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad \text{e podia ser} \quad \sigma \sim \frac{g_w^2}{s}$$

como acontece, por exemplo no processo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em QED.

- Vamos mostrar que embora o comportamento seja melhor no modelo IVB, ainda não resolve todos os problemas.
- Voltemos ao processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ que agora se representa



- A amplitude é agora

$$\mathcal{M} = g_w^2 \bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2)$$

- Poder-se-ia pensar que os fatores de momento no numerador do propagador do W iriam piorar o comportamento para valores elevados da energia no centro de massa. Tal não é verdade, pois uma vez utilizada a equação de Dirac, esses termos vão ser proporcionais à massa dos leptões que desprezamos no limite das altas energias.
- Então para $\sqrt{s} \gg m_W$ obtemos

$$\mathcal{M} \simeq \frac{g_w^2}{s} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \bar{u}(q_1)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(q_2)$$

o que comparado com a expressão na teoria de Fermi mostra que

$$G_F \rightarrow \frac{g_w^2}{s}$$

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

Problemas

• Interação Fermi

• **Modelo IVB**

Formulary

- Então o cálculo da secção eficaz dá

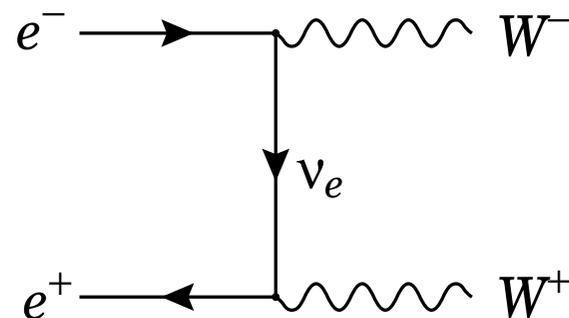
$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-) \sim \frac{g_w^2}{s}$$

o que está de acordo com a unitariedade.

- Como dissemos atrás, embora deixe de haver problema para este processo, outros há em que os problemas persistem.
- Para vermos isso consideremos o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$$

no quadro do modelo IVB. Temos então o diagrama da



- A amplitude é proporcional a

$$\mathcal{M} \sim g_w^2 \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) \epsilon_\mu^*(q_2, \lambda_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 - \not{q}_1}{(p_1 - q_1)^2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1)$$

- No limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ obtemos

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \sim \frac{g_w^4}{m_W^4} s f(\theta)$$

o que mostra que temos o mesmo problema que na teoria pontual de Fermi

- Um estudo mais detalhado mostra que o problema está na polarização longitudinal dos W 's
- Notar que o processo semelhante

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

em QED não tem qualquer problema. Podemos assim suspeitar que a invariância de gauge de QED, relacionada com a massa zero do fóton, e a ausência de polarização longitudinal, deve ser a chave do problema.

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

Problemas

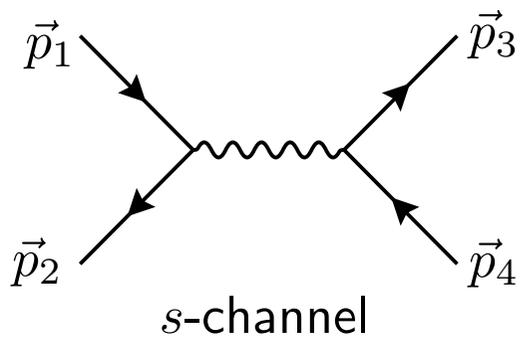
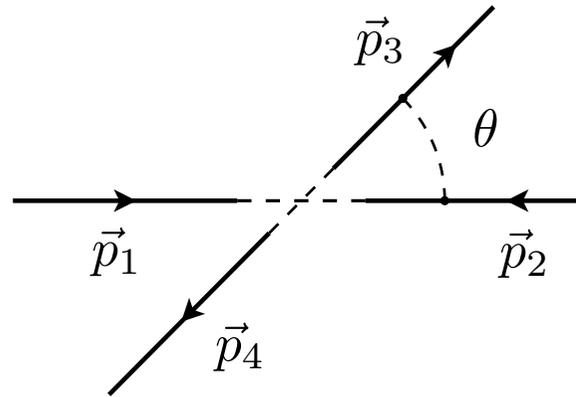
Formulary

● Kinematics

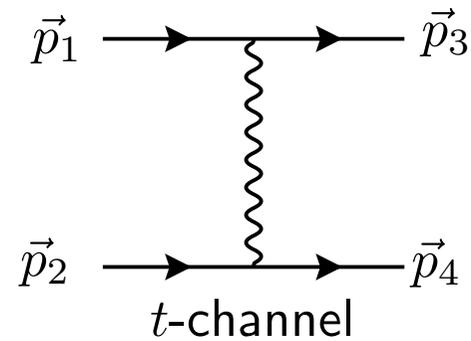
● s-channel

● t-channel

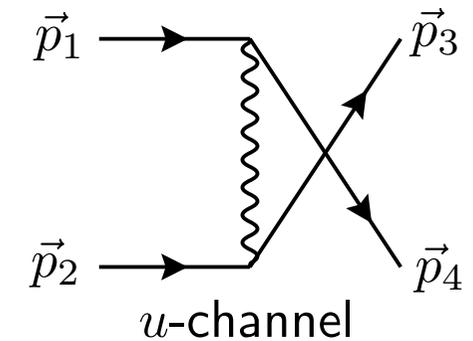
● u-channel



$$s = (p_1 + p_2)^2$$



$$t = (p_1 - p_3)^2$$



$$u = (p_1 - p_4)^2$$

Mandelstam variables

[Sumário](#)

[A teoria de Fermi](#)

[A teoria V-A](#)

[Hadrões](#)

[Problemas](#)

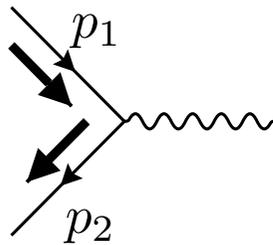
[Formulary](#)

• [Kinematics](#)

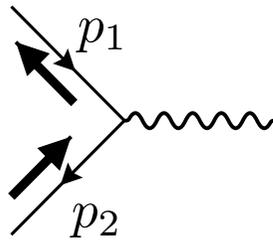
• **[s-channel](#)**

• [t-channel](#)

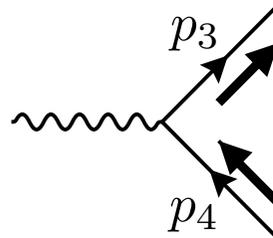
• [u-channel](#)



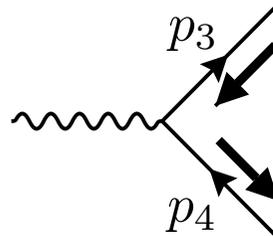
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -1, -i, 0)$$



$$J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -1, i, 0)$$



$$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta)$$



$$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta)$$

Sumário

A teoria de Fermi

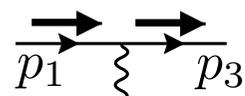
A teoria V-A

Hadrões

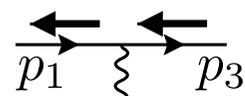
Problemas

Formulary

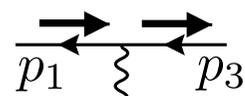
- Kinematics
- s-channel
- **t-channel**
- u-channel



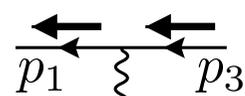
$$J_{u_1 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



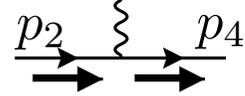
$$J_{u_1 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



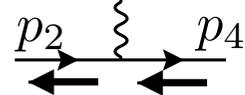
$$J_{v_1 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



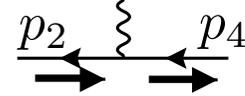
$$J_{v_1 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



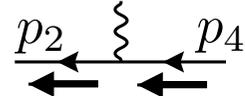
$$J_{u_2 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



$$J_{u_2 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



$$J_{v_2 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



$$J_{v_2 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Sumário

A teoria de Fermi

A teoria V-A

Hadrões

Problemas

Formulary

- Kinematics
- s-channel
- t-channel
- **u-channel**

$$J_{u_1 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{u_1 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{u_2 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{u_2 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{v_1 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{v_1 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{v_2 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$J_{v_2 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$$