Mecânica Quântica – Exame – 1/2/2008

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008
Duração 3h

Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto. Todas as alíneas têm igual cotação, excepto no Grupo III, onde a cotação está explicitamente indicada.

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Considere o poço de potencial com: $V = \infty,\ x < 0$, $V = -V_0,\ 0 < x < a$, $V = 0,\ x > a$. Existe sempre pelo menos um estado ligado.

2. Considere um estado do oscilador harmónico em que $\psi(x,0) = -\psi(-x,0)$. Então $\langle x \rangle \neq 0$.

3. Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico, a uma dimensão, temos sempre $\langle n|x^3|n+2\rangle = 0$.

4. Se U e V forem operadores unitários, então UV também é um operador unitário. (Nota: um operador unitário satisfaz $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$).

5. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,-1\rangle\right)$$

   onde os estados $|l,m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. Faz-se uma medida de L_z^2 e obtém-se 0. A probabilidade duma medida de L_z, feita imediatamente a seguir à medida anterior, de dar $-\hbar$ é 1/6.

6. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$\psi(r,\theta,\varphi) = Ae^{-r^2/r_0^2}\ \sin^2\theta\cos 2\varphi$$

   A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = 0$ é 1/3.

7. As riscas da série de Balmer (transições $n \geq 3 \rightarrow n = 2$) foram as primeiras a ser descobertas por o respectivo comprimento de onda se situar no visível.

8. A energia do estado fundamental do positrónio (um átomo formado por um positrão e um electrão) é 27.2 eV.

II (4 valores)

Seja um electrão no poço de potencial **simétrico**, isto é, $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. Considere o estado

$$\psi(x,0) = A\ u_1^+(x) + B\ u_1^-(x)$$

1. Determine as constantes A e B, sabendo que o valor médio da energia no estado ψ é $\langle E \rangle = 2E_0$, com $E_0 = \pi^2\hbar^2/(2ma^2)$. Considere A e B reais e positivas.

2. Qual a probabilidade de que uma medida da energia do sistema dê o valor E_1^-? Justifique.

3. No instante $t = 0$ calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$.

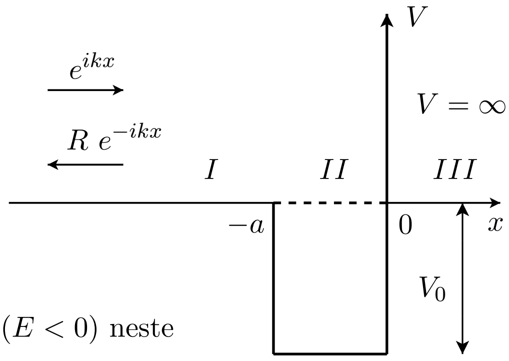
4. Para além dos valores $x = \pm a/2$, verifique que há outro valor de x para o qual a densidade de probabilidade $P(x,0) = |\psi(x,0)|^2$ se anula. Determine esse valor. Se não determinou A e B exprima o resultado em função destas constantes. **Nota:** Não complique. Observe que $P(x,0) = 0$ **sse** $\psi(x,0) = 0$.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.



1. **[1 val]** Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial é
$$\cot qa = -\frac{\alpha}{q}$$
onde, como habitualmente, $q = \sqrt{2m(V_0 - |E|)/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$.

2. **[0.5 val]** Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?

3. **[0.5 val]** Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{18\hbar^2}{ma^2}$?

4. **[0.5 val]** Nas condições da alínea anterior, esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o último estado ligado (o de maior energia).

5. **[1.5 val]** Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < -a$ a função de onda é dada por
$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$
Calcule R e mostre que $|R| = 1$. Mostre que no limite $V_0 \to 0$, temos $R = -1$. Explique porquê.

IV (2 valores)

A função de onda duma partícula num potencial esfericamente simétrico é dada por

$$\psi(\vec{r}) = C\ \frac{x+y+z}{r}\ e^{-\frac{r^2}{a^2}}$$

onde a é um parâmetro com as dimensões dum comprimento.

1. Determine a constante de normalização C, real e positiva. **Sugestão:** Use as harmónicas esféricas e os integrais dados no formulário.

2. Qual é a probabilidade de que uma medida dê o valor $L^2 = 2\hbar^2$? E o valor $L_z = \hbar$?

V (3 valores)

Considere um sistema com dois estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ e com um Hamiltoniano H_0, representado nesta base por

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

com $E_1 < E_2$.

1. Considere uma perturbação que se pode escrever nesta base

$$H_1 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}$$

com $\Delta > 0$. Calcule as correcções de primeira ordem aos níveis de energia do sistema.

2. Considere agora uma perturbação da forma

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

também com $\Delta > 0$. Mostre que, em teoria de perturbações, as correcções de 1ª ordem são nulas. Calcule as correcções de 2ª ordem.

3. Resolva o problema exactamente para o Hamiltoniano $H = H_0 + H_2$ e compare com os resultados da alínea anterior, no limite em que $\Delta \ll E_1, E_2, E_2 - E_1$.

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. Um campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ é aplicado segundo o eixo dos z. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} = \hbar\omega \; \sigma_z$$

onde $\omega = \dfrac{eB_0}{2m}$. No instante $t = 0$, o sistema está no estado com spin $+\hbar/2$ segundo o eixo dos y, isto é,

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ i\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1. Determine o estado do sistema no instante t, $\psi(t)$.
Nota: Este problema tanto se pode fazer resolvendo directamente a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

como, usando o facto de que o Hamiltoniano é diagonal, determinando os estados estacionários e aplicando o postulado da expansão para estados estacionários.

2. Para o estado $\psi(t)$, calcule o valor médio $\langle S_y \rangle \equiv \langle \psi(t) | S_y | \psi(t) \rangle$.

3. Calcule a probabilidade duma medida do spin segundo o eixo dos x dar o valor $+\hbar/2$, no instante t.

Dados Adicionais:

- Os vectores próprios do operador $S_n = \vec{S} \cdot \vec{n}$, onde, $\vec{n} = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$, são

$$\psi(S_n = +\hbar/2) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \psi(S_n = -\hbar/2) = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- As matrizes de Pauli são

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$