

# Mecânica Quântica – Série 11

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

(Versão de 19 de Novembro de 2007)

## 11.1 Gasirowicz 11.1

Nota:

- Calcule a correcção de 2ª ordem e compare com o desenvolvimento em série do resultado exacto até à 2ª ordem em  $\lambda$ .

## 11.2 Gasirowicz 11.2

Comentário: Qual a razão para o resultado?

## 11.3 Gasirowicz 11.5

Notas:

1. Exprima a perturbação em termos de  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $a_0$  e  $R$ . Mostre que se obtém:

$$H_1 = \begin{cases} \mu c^2 \alpha \left( -\frac{3a_0}{2R} + \frac{a_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{a_0 r^2}{R^3} \right) & 0 < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

2. Utilize o `mathematica` para fazer os integrais. Se os fizer “à mão” utilize

$$\int dy y^n e^{-y} = -e^{-y} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} y^k$$

3. Mostre que o resultado tende para zero quando  $R \rightarrow 0$ . Mostre que

$$\Delta E_{10} \simeq \frac{2}{5} \mu c^2 \alpha \left( \frac{R}{a_0} \right)^2, \quad \Delta E_{21} = \Delta E_{20} \simeq \frac{1}{1120} \mu c^2 \alpha \left( \frac{R}{a_0} \right)^4$$

4. Calcule numericamente a correcção quando  $R = 10^{-15}$  m = 1 fermi, isto é a dimensão do protão. Notar que como  $R \ll a_0$  só vai conseguir um resultado que faça sentido se usar uma precisão de mais de 40 dígitos ou, em alternativa, usar os resultados da expansão em série em termos de  $R/a_0$ .
5. Explique porque é que  $\Delta E_{2l} \ll \Delta E_{10}$ .

## 11.4 Gasirowicz 11.6

Nota:

1. Este problema faz-se mais facilmente se usar os operadores  $A$  e  $A^+$ .
2. Faça também com as funções próprias das coordenadas.

### 11.5 *Gasiorowicz 11.7*

### 11.6 *Gasiorowicz 11.11*

Notas:

1. Comece por resolver o problema exactamente. Para isso faça uma rotação de  $45^\circ$  nas coordenadas  $x, y$ .
2. Expanda o resultado exacto para os valores próprios da energia até à ordem  $\lambda^2$ .
3. Resolva agora o problema em teoria das perturbações. Comece por mostrar que o estado fundamental só tem correcção em ordem  $\lambda^2$ . Verifique que está de acordo com a expansão em  $\lambda$  do resultado exacto.
4. Resolva agora o problema das correcções ao primeiro estado excitado que é degenerado. Verifique novamente que o resultado está em acordo com a expansão do resultado exacto.

### 11.7 *Gasiorowicz 11.12*

Notas:

1. Notar que este problema não é propriamente um problema de teoria de perturbações. Se tomarmos como eixo dos  $z$  a direcção do campo  $\vec{B}$ , os estados próprios do átomo de hidrogénio,  $|n, l, m\rangle$  são também estados próprios do hamiltoniano de interacção e portanto o cálculo das energias é trivial.
2. Este exemplo é o chamado *efeito de Zeeman*. A não observação dum número ímpar de estados desdobrados  $(2l + 1)$ , como resulta na resolução deste problema, levou Pauli em 1924 a propor a ideia do spin.

### 11.8 *Gasiorowicz 11.13*

Nota: Na alínea b) considere que  $\lambda, v \neq u$  são reais.

11.9 Calcule os integrais necessários para obter

$$\langle \phi_{200} | z | \phi_{210} \rangle = -3a_0$$

onde  $a_0$  é o raio de Bohr. Este resultado é importante para calcular o *efeito de Stark* no átomo de hidrogénio para  $n = 2$ .