Resolução do 1º Teste de MQ (17/11/2007)

I

1. Falso. Os 3 operadores não comutam TODOS uns com os outros

2. Verdadeiro. Os estados de energia mínima são sempre os simétricos pois têm menos nodos.

3. Falso. Não há soluções para $E < V_{min}$.

4. Falso. $[H, p] \neq 0$ pois $[V(x), p] \neq 0$

5. Verdadeiro. $A^{+}A|n\rangle = n|n\rangle$

II

1. De acordo com o postulado de expansão:

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x) \qquad \text{com} \qquad \sum_n |A_n|^2 = 1$$

$$\langle H \rangle_{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 E_n$$

Logo os únicos coeficientes diferentes de zero são

$$A_1 = \frac{1}{3} \quad ; \quad A_2 = A \quad ; \quad A_3 = B$$

satisfazendo (A e B reais e positivos)

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + A^2 + B^2 = 1 \\ \frac{1}{9} E_1 + A^2 E_2 + B^2 E_3 = \frac{16}{3} E_1 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + A^2 + B^2 = 1 \\ \frac{1}{9} + 4A^2 + 9B^2 = \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow A^2 = \frac{3}{9} \quad ; \quad B^2 = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2. $P(E=E_1) = |A_1|^2 = \frac{1}{9}$

3. $$\langle x\rangle = C^2 \int_0^a dx\, u_1^2(x)\, x + D^2 \int_0^a dx\, u_2^2(x)\, x + 2CD \int_0^a dx\, u_1(x) u_2(x)\, x$$

Fazendo os integrais com $\frac{\pi x}{a} = y$

$$\int_0^a dx\, u_1^2(x) x = \left(\frac{2}{a}\right) \int_0^a dx\, x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi dy\, y \sin^2 y$$

$$= \frac{2a}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a dx\, u_2^2(x)\, x = \left(\frac{2}{a}\right) \int_0^a dx\, x \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi dy\, y \sin^2(2y)$$

$$= \frac{2a}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a dx\, u_1 u_2\, x = \frac{2a}{\pi^2} \int_0^\pi dy\, y \sin y \sin 2y$$

$$= \frac{2a}{\pi^2} \frac{1}{2} \left[\cos y - \frac{1}{9} \cos 3y + y \sin y - \frac{1}{3} y \sin 3y \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2a}{\pi^2} \frac{1}{2} \left[-2 - \frac{1}{9}(-2) \right] = -\frac{16a}{9\pi^2}$$

usando $C^2 + D^2 = 1$ vem

$$\langle x\rangle = \frac{a}{2} + \frac{8a}{3\sqrt{3}\pi^2} = \frac{a}{2} - \frac{32a}{9\pi^2} CD$$

$$CD = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$. Como $C>0 \Rightarrow D<0$

$$C^2 D^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow C^2(1-C^2) = \frac{3}{16} \Rightarrow C^4 - C^2 + \frac{3}{16} = 0$$

$$c^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{3}{4}}}{2} : \begin{cases} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Duas soluções:

$$C = \sqrt{\frac{3}{4}} \; ; \; D = -\frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{2} \; ; \; D = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

4. Método 1:

$$p^2 = 2mH$$

$$\langle p^2 \rangle = 2m \langle H \rangle = 2m \left(C^2 E_1 + D^2 E_2 \right) = 2m \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \left(C^2 + 4D^2 \right)$$

Logo

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \left(C^2 + 4D^2 \right)$$

Método 2:

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad :$$

Como

$$p^2 u_1(x) = -\hbar^2 \left(-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right) u_1(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} u_1(x)$$

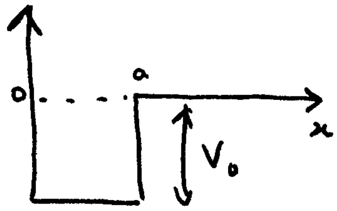
$$p^2 u_2(x) = -\hbar^2 \left[-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \right] u_2(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} 4 u_2(x)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^a dx \, (Cu_1 + Du_2) \, p^2 \, (Cu_1 + Du_2)$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \Big[C^2 \underbrace{\int_0^a dx \, u_1^2}_{=1} + 4D^2 \underbrace{\int_0^a dx \, u_2^2}_{=1} + 8CD \underbrace{\int_0^a dx \, u_1 u_2}_{=0} \Big]$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \left(C^2 + 4D^2 \right)$$

1.



Seja $E < 0$ (mas $E > -V_0$)

Definimos: $\chi^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)$$

$$\begin{cases} u_I(x) = A \sin qx & (\text{pois } u_I(0)=0) \\ u_{II}(x) = B e^{-\chi x} & (\text{normalizável}) \end{cases}$$

Condições em $x=a$

$$\begin{cases} A \sin qa = B e^{-\chi a} \\ q A \cos qa = -\chi B e^{-\chi a} \end{cases} \Rightarrow q \cot qa = -\chi$$

é conveniente multiplicar por a e obter

$$\boxed{qa \cot qa = -\chi a}$$

2. Para resolver a equação fazemos

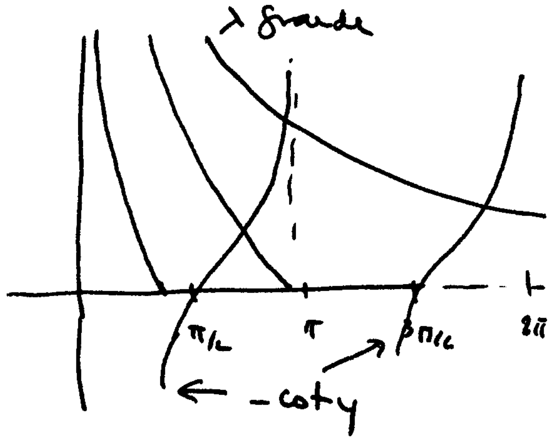
$$y = qa \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$

Então

$$\chi a = \sqrt{\frac{2m|E|a}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} - q^2a} = \sqrt{\lambda - y^2}$$

e a equação vem

$$\boxed{-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}}$$

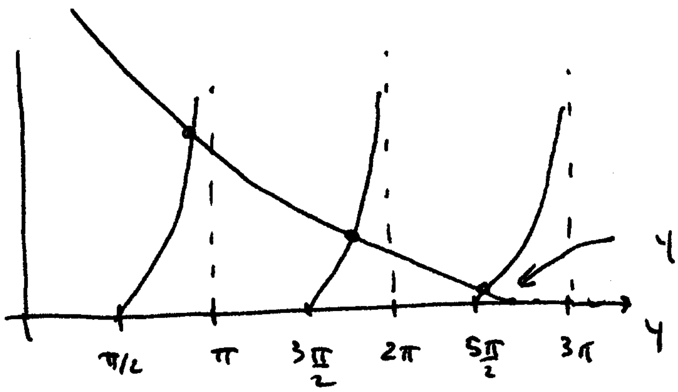


Para haver um estado

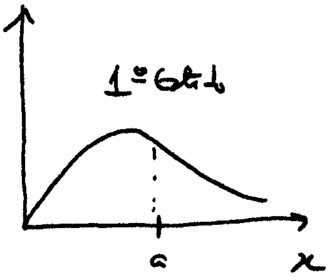
$$\lambda > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Rightarrow V_0 > \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

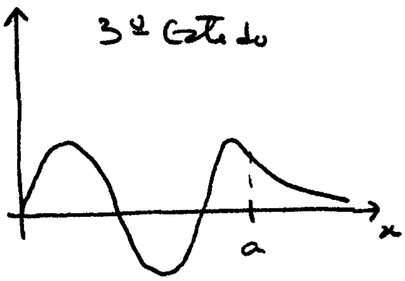
3 $V_0 = \frac{32\hbar^2}{ma^2} \Rightarrow \lambda = 64$

$\sqrt{\lambda} = 8 > \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$ Há 3 estados ligados



4





5 Como $u_I(0)=0$ temos

$$\begin{cases} u_I(x) = A\sin qx \\ u_{II}(x) = e^{-ikx} + R\,e^{ikx} \end{cases}$$

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}$$

$E>0$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

Condições em $x=a$

$$A\sin qa = e^{-ika} + R\,e^{ika}$$

$$qA\cos qa = -ik\left(e^{-ika} - R\,e^{ika}\right)$$

$$iq\,\mathrm{cotg}\,qa = k\,\frac{e^{-ika} - Re^{ika}}{e^{ika} + Re^{ika}} \Rightarrow R = e^{-2ika}\,\frac{k - iq\,\mathrm{cotg}\,qa}{k + iq\,\mathrm{cotg}\,qa}$$

$|R|=1 \Rightarrow |R|^2 = 1$

6. $$J(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

$j_I(x) = 0$ pois a função é real. (É verdade mesmo com A complexo)

$$j_{II}(x) = \frac{\hbar k}{m}\left(-1 + |R|^2\right) = 0$$ (fluxo para a direita)