Exame Exemplo (2008/2009)

I

1. Falso. os valores próprios dum operador hermítico são reais

2. Verdadeira. $x \propto (A + A^+)$ e $\langle n|A|n\rangle = 0 = \langle n|A^+|n\rangle$

3. Verdadeira. $\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |A_n|^2$

$$= E_0 |A_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n |A_n|^2$$

$$= E_0\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n |A_n|^2$$

$$= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n - E_0)|A_n|^2 \geq E_0$$

4. Verdadeira. $\left[(A+B)^2\right]^+ = (A+B)^+ (A+B)^+ = (A+B)^2$

II

1. Pelo postulado de Expansão

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x)$$

os únicos $A_n \neq 0$ são

$$A_0 = 2A \; ; \quad A_1 = -4A \; ; \quad A_2 = A$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 = 1 \Rightarrow A^2(4+16+1) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{21}} \quad (A>0)$$

e portanto

$$P(E=E_1) = |A_1|^2 = \frac{16}{21}$$

2. $$\langle H \rangle = |A_0|^2 E_0 + |A_1|^2 E_1 + |A_2|^2 E_2$$

$$= \frac{1}{21} \frac{\hbar\omega}{2} (4 + 16 \times 3 + 1 \times 5)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \frac{19}{17}$$

3. $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{21}} \left[2 u_0(x)\, e^{-i\frac{\omega}{2}t} - 4 u_1(x)\, e^{-i\frac{3}{2}\omega t} + u_3(x)\, e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \right]$$

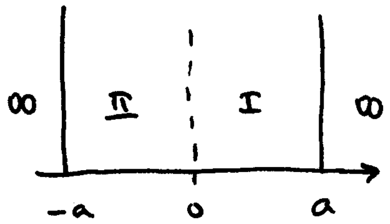
4. $$\psi(x,T) = \psi(x,0) \Rightarrow \frac{\omega}{2} T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega}$$

(notar que $\frac{3}{2}\omega T = 6\pi$ e $\frac{5}{2}\omega T = 10\pi$)

III

1. O problema tem simetria $x \to -x$. Logo $[H, P] = 0$ e as funções próprias de H são funções próprias da Paridade: pares e ímpares.

2.



$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Solução par

$$\begin{cases} u_I(x) = A \sin kx + B \cos kx & 0<x<a \\ u_{II}(x) = -A \sin kx + B \cos kx & -a<x<0 \end{cases}$$

Em $x=a$

$$A \sin ka + B \cos ka = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = -\tan ka$$

E $x=0$

$$u_I'(0) - u_{II}'(0) = \frac{\lambda}{a} u_I(0)$$

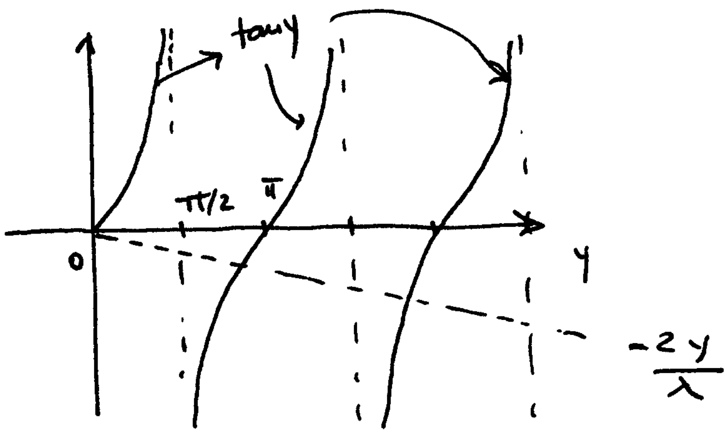
ou

$$Ak - (-Ak) = \frac{\lambda}{a} B \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{2ka}{\lambda}$$

Donde

$$\boxed{\tan ka = -\frac{2ka}{\lambda}}$$

3. Seja $y = ka$. Então a equação é $\tan y = -\frac{2y}{\lambda}$



quando $\lambda \to 0$

Do gráfico verifica-se que há sempre solução e que quando $x \to 0$ a solução é $y = \pi/2 \Rightarrow ka = \pi/2$. Então

$$E_0 = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} = E_+$$

4. Solução ímpar

$$\begin{cases} u_I(x) = A\sin kx + B\cos kx & 0 < x < a \\ u_{II}(x) = A\sin kx - B\cos kx & -a < x < 0 \end{cases}$$

Em $x=0$

$$u'_I(0) - u'_{II}(0) = \frac{\lambda}{a} u_I(0) = 0$$

$$u_I(0) = u_{II}(0) \Rightarrow \boxed{B=0}$$

Em $x=a$ (tomando $B=0$)

$$A\sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \qquad n = 1, 2 \ldots$$

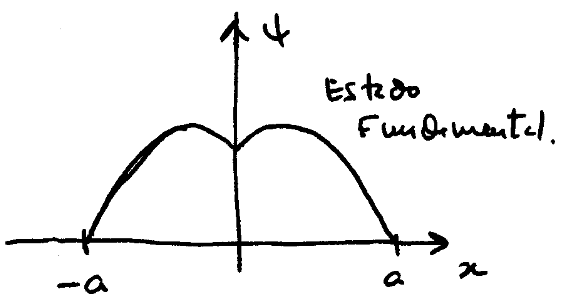
O estado mais baixo é $n=1$

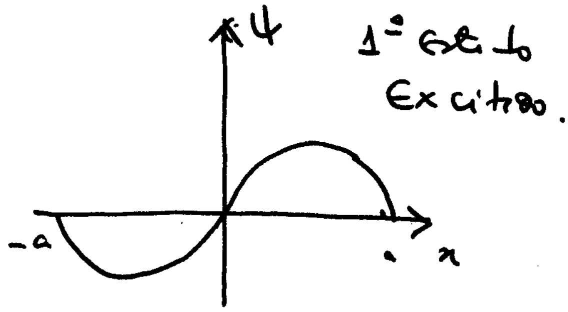
$$E_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = E_-$$

A energia é igual à do estado $u_-(x)$. Do gráfico anterior pode verificar-se que a solução do estado fundamental tem sempre

$$\frac{\pi}{2} < y < \pi \Rightarrow E_1 > E_0 \quad \forall \lambda$$

5.





6. <u>$E<0$</u>. Para o estado fundamental deve ser uma solução par. (7)

$$\begin{cases} u_I(x) = A\sinh\alpha x + B\cosh\alpha x & 0<x<a \\ u_{II}(x) = -A\sinh\alpha x + B\cosh\alpha x & -a<x<0 \end{cases}$$

Com $\alpha = \sqrt{\dfrac{2m|E|}{\hbar^2}}$.

<u>Em $x=a$</u>

$$A\sinh\alpha a + B\cosh\alpha a = 0 \Rightarrow \frac{B}{A} = -\tanh\alpha a$$

<u>Em $x=0$</u>

$$u_I'(0) - u_{II}'(0) = \frac{\lambda}{a} u_I(0)$$

$$\alpha A - (-\alpha A) = \frac{\lambda}{a} B \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{2\alpha a}{\lambda}$$

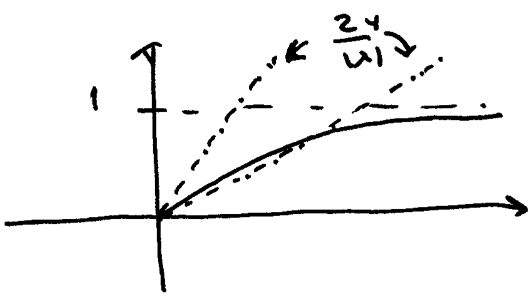
logo

$$\boxed{\tanh\alpha a = -\frac{2\alpha a}{\lambda}}$$

Seja $\lambda = -|\lambda|$. Então

$$\boxed{\tanh\alpha a = \frac{2\alpha a}{|\lambda|}}$$

Tomemos $y = \alpha a \Rightarrow \tanh y = \dfrac{2y}{|\lambda|}$



Para haver solução

$$(\tanh y)'_{y=0} > \left(\frac{2y}{|\lambda|}\right)' = \frac{2}{|\lambda|}$$

$$\Rightarrow |\lambda| > 2 = \lambda_0$$

IV

1. Falso. Dois spin 1 podem estar nos estados ($m=0$)

$$|2,0\rangle \; ; \; |1,0\rangle \; ; \; |0,0\rangle$$
$$L^2 = 6\hbar^2 \qquad L^2 = 2\hbar^2 \; ; \; L^2 = 0$$

2. Falso. Depois da 1ª medição o estado colapsa para uma combinação linear de $|1,1\rangle$ e $|1,-1\rangle$ com igual probabilidade. Portanto $P(L_z = -\hbar) = \frac{1}{2}$.

3. Verdadeiro $\quad \sin 2\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) \Rightarrow \psi = C e^{-r^2/r_0}\left(Y_{2,2} - Y_{2,-2}\right)$

$$P(L_z = 2\hbar) = P(L_z = -2\hbar) = \frac{1}{2}$$

4. Falso $\quad$ a Energia é proporcional a Z^2.

V

1. $\quad L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$

logo
$$\langle l,m|L_z^2|l,m\rangle = \hbar m\langle l,m|L_z|l,m\rangle = \hbar^2 m^2 \underbrace{\langle l,m|l,m\rangle}_{=1}$$
$$= \hbar^2 m^2$$

2. É mais fácil tomar $m=0$ desde o início. Usando

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

obtemos sucessivamente

$$L_x|l,0\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|l,0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{l(l+1)}\left(|l,1\rangle + |l,-1\rangle\right)$$

$$L_zL_x|l,0\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\sqrt{l(l+1)}\,|l,1\rangle - \frac{1}{2}\hbar^2\sqrt{l(l+1)}\,|l,-1\rangle$$

e

$$L_x L_z L_x |\ell,0\rangle = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right) L_z L_x |\ell,0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^2\sqrt{\ell(\ell+1)}\left(L_+ + L_-\right)|\ell,1\rangle - \frac{1}{4}\hbar^2\sqrt{\ell(\ell+1)}\left(L_+ + L_-\right)|\ell,-1\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^3\sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\ell(\ell+1)-2}\;|\ell,2\rangle$$

$$+ \frac{1}{4}\hbar^2\,\cancel{\ell(\ell+1)}\,|\ell,0\rangle$$

$$- \frac{1}{4}\hbar^2\,\cancel{\ell(\ell+1)}\,|\ell,0\rangle$$

$$- \frac{1}{4}\hbar^3\sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\ell(\ell+1)-2}\;|\ell,-2\rangle$$

e finalmente

$$\langle \ell,0|L_x L_z L_z|\ell,0\rangle = \frac{1}{4}\hbar^3\sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\ell(\ell+1)-2}\left[\langle \ell,0|\ell,2\rangle - \langle \ell,0|\ell-2\rangle\right]$$

$$= 0$$ (devido à ortogonalidade dos estados $|\ell,m\rangle$)

VI

1. $E_0^{(0)} = 0$. A correcção de 1ª ordem será (o estado não é degenerado)

$$E_0^{(1)} = \langle \psi_0|H_1|\psi_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, V_0\cos 2\varphi$$

$$= \frac{V_0}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = 0$$

2. O primeiro estado excitado é degenerado. Assim temos de usar teoria de perturbação para o caso degenerado.

temos os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_{-1}\rangle$ com a mesma energia.
Construímos a matriz

$$H^{(1)}_{ij} = \langle \psi_i | H_1 | \psi_j \rangle \qquad i,j = -1, 1$$

Temos:

$$\langle \psi_1 | H_1 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} V_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-i\varphi} \cos 2\varphi \, e^{i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} V_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi = 0$$

Igualmente.

$$\langle \psi_{-1} | H_1 | \psi_{-1} \rangle = \frac{1}{2\pi} V_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i\varphi} \cos 2\varphi \, e^{-i\varphi} = 0$$

isto é, os termos diagonais anulam-se. Calculemos os outros elementos:

$$\langle \psi_{-1} | H_1 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} V_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i\varphi} \, \frac{e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}}{2} \, e^{i\varphi}$$

$$= \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[e^{i4\varphi} + 1 \right] = \frac{V_0}{4\pi} \left[0 + 2\pi \right] = \frac{V_0}{2}$$

Igualmente

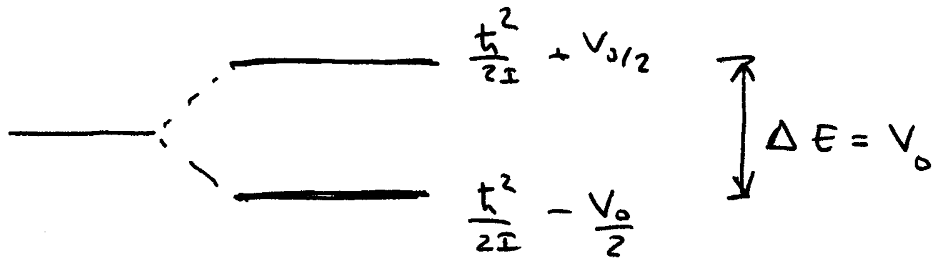
$$\langle \psi_1 | H_1 | \psi_{-1} \rangle = \frac{V_0}{2}$$

e podemos escrever

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_0}{2} \\ \frac{V_0}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{V_0}{2}$$

e portanto o 1º estado excitado deixará de ser degenerado tendo energias

$$E^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2I} \pm \frac{V_0}{2}$$



3. $$E_0^{(2)} = \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle \psi_0 | H_1 | \psi_k \rangle|^2}{0 - E_k^{(0)}}$$

Da resposta da alínea anterior deve ser claro que só os estados com $k = \pm 2$ devem contribuir. De facto

$$\langle \psi_0 | H_1 | \psi_k \rangle = \frac{V_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{ik\varphi} \left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} \right)$$

$$= \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i(k+2)\varphi} + \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i(k-2)\varphi}$$

$$= \frac{V_0}{2} \left[\delta_{k,2} + \delta_{k,-2} \right]$$

Assim

$$E_0^{(2)} = -\frac{1}{\frac{4\hbar^2}{2I}} \left(\frac{V_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{\frac{4\hbar^2}{2I}} \left(\frac{V_0}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4} \frac{V_0^2 I}{\hbar^2}$$

VII

1. Definimos o spin total

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} \left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 \right)$$

o campo $\vec{B}$ define o eixo dos zz pelo que o Hamiltoniano se pode escrever

$$H = V_0\left[\frac{1}{2\hbar^2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 \right) + \eta \frac{1}{\hbar} S_z \right]$$

com $\eta = \frac{\mu_B B}{V_0}$. Temos ainda $S_1^2 = S_2^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ (spin 1/2)

e S pode tomar os valores 0 (singleto) e 1 (tripleto).

Assim o Hamiltoniano é diagonal na base $|S, m_S\rangle$ do spin total com

$$S^2 | S, m_S\rangle = \hbar^2 S(S+1) | S, m_S\rangle$$

$$S_z | S, m_S\rangle = \hbar m_S | S, m_S\rangle$$

e portanto os seus valores próprios são:

$$H | s, m_s\rangle = V_0\left[\frac{1}{2}\left(S(S+1) - \frac{3}{2} \right) + \eta m_S \right] | s, m_S\rangle$$

<u>Há 4 estados:</u>

<u>Singleto</u> $|0,0\rangle$

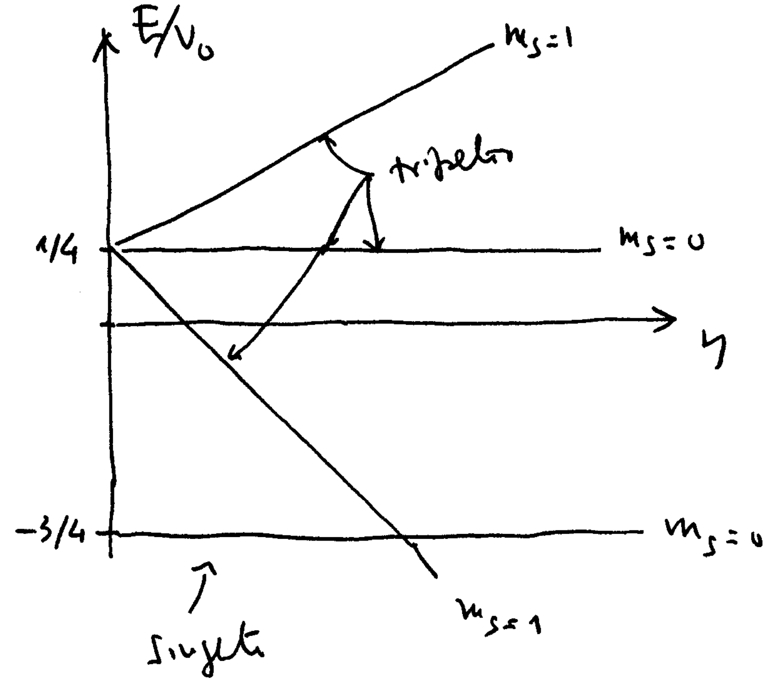
$$H|0,0\rangle = V_0\left[-\frac{3}{4} \right] |00\rangle$$

<u>Tripleto</u> $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$

$$H|1,1\rangle = V_0\left[\frac{1}{4} + \eta \right] |1,1\rangle$$

$$H|1,0\rangle = V_0 \frac{1}{4} |1,0\rangle$$

$$H|1,-1\rangle = V_0\left[\frac{1}{4} - \eta \right] |1,-1\rangle$$



2. Para um dos valores de B o estado $|1,-1\rangle$ intersecta o singleto. Isso acontece quando

$$-\frac{3}{4}V_0 = V_0\left[\frac{1}{4} - \eta\right] \Rightarrow \eta = 1 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\mu_B}$$

<u>Nota</u>: O estado $|1,1\rangle$ também intersecta o estado singleto para $\eta = -1$. Contudo esta solução não faz sentido para o nosso problema. Não há um eixo dos z definido <u>à priori</u> <u>antes</u> da aplicação do campo $\vec{B}$. Se houvesse, isso seria <u>outro</u> problema, em que se tinha alinhado o spin total <u>antes</u> da aplicação do campo $\vec{B}$, o que não é dito no enunciado.