

Mecânica Quântica – Série 1 – Soluções

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009

Versão de 22/09/2008

1.1 O zero da derivada ocorre para o zero da equação

$$5 - x = 5e^{-x}$$

com $x = h\nu/k_B T$. O zero ocorre para $x_0 = 4.965$ e portanto

$$\lambda_{\max} T = 2.89 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

1.2 Se $h\nu \ll k_B T$ então $e^{h\nu/(k_B T)} - 1 \simeq (1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1) \simeq h\nu/(k_B T)$ e portanto

$$u(\nu, T) \simeq \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_B T}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

***1.3** Resposta:

$$P(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} T^4 \equiv \sigma T^4$$

1.4 Resposta: 5.7%

1.5 Ver o site.

1.6 Resposta: 1.95 eV

***1.7** Resposta: $h = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} [T_{\max}(\lambda_1) - T_{\max}(\lambda_2)] = 6.642 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
 $W = 3.9 \text{ eV}$.

***1.8** Respostas: 83.6 keV; 16.4 keV; 39.9°

1.9 [Resposta: $E_\gamma = 4.14 \times 10^{-4} \text{ eV}$; $\Delta E \simeq 4 \left(\frac{E_e}{m_e c^2}\right)^2 E_\gamma = 6.37 \times 10^{-5} \text{ MeV}$]

1.10 a) De $\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$, com $T = 2.72 \text{ K}$, obtemos

$$\lambda_{\max} = 1.06 \times 10^6 \text{ nm}, \quad \text{e portanto} \quad E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = 1.17 \times 10^{-3} \text{ eV}.$$

b) Cinemática Relativista

Define-se o quadri-vector momento na forma:

$$p = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

que obedece à seguinte regra de produto interno (invariante para transformações de Lorentz):

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$$

onde se usou $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$. O referencial do **centro de massa**, mais rigorosamente referencial **CM**, é o referencial onde o momento linear total é zero. Voltando ao problema,

$$p_1 + p_2 = P$$

No Lab:

$$p_1 = (E_1/c, 0, 0, |\vec{p}_1|), \quad p_2 = (E_\gamma/c, 0, 0, -E_\gamma/c), \quad P = ((E_1 + E_\gamma)/c, 0, 0, |\vec{p}_1| - E_\gamma/c)$$

com $|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2/c^2 - m^2 c^2}$.

No CM:

$$P_{\text{CM}} = (\sqrt{s}/c, 0, 0, 0)$$

Como P^2 é um invariante de Lorentz pode ser calculado em qualquer referencial de inércia. Assim temos

$$s = P_{\text{CM}}^2 c^2 = P_{\text{Lab}}^2 c^2 = (E_1 + E_\gamma)^2 - (|\vec{p}_1|c - E_\gamma)^2 = m_p^2 c^4 + 2|\vec{p}_1|c E_\gamma$$

A condição de ressonância é $s = m_\Delta^2 c^4$ e portanto obtemos

$$2E_\gamma(E_1 + |\vec{p}_1|c) = (m_\Delta^2 - m_p^2)c^4$$

Como $E_1 \gg m_p$ temos $|\vec{p}_1|c \simeq E_1 = E_p$ e vem finalmente

$$E_p = \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^4}{4E_\gamma} \simeq 1.36 \times 10^{20} \text{ eV}.$$

1.11 Resposta: $E_\gamma = 544.03 \text{ keV}$

***1.12** Resposta: a) $T_{\text{max}} = 2.75 \text{ eV}$, $v = 9.95 \times 10^5 \text{ m/s}$
b) $N_e = 2.5 \times 10^{18} \text{ electrões/m}^2/\text{s}$

***1.13** Resposta: $\Delta T = 0.1 \text{ s}$

1.14 Resposta: a) $\lambda' = 3.1 \times 10^{-12} \text{ m}$; b) $\theta = 41.9^\circ$

***1.15** Resposta no enunciado.

***1.16** Resposta: a) $T_e = 0.133 \text{ keV}$; b) $T_{He} = 1.8 \times 10^{-2} \text{ eV}$

1.17 Ver o site.

***1.18** Resposta: a) $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}, n = 1, 2, 3 \dots$

b) $\nu_{\text{classica}} = \frac{\hbar n}{2\pi I}, \nu_{\text{Bohr}} = \frac{\hbar n_2^2 - n_1^2}{2\pi 2I} \simeq \frac{\hbar 2n_1}{2\pi 2I} \simeq \nu_{\text{classica}}$ para $n_2 = n_1 + 1$ e $n_1 \gg 1$

***1.19** Resposta no enunciado.