Mecânica Quântica – Série 10

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009

`(Versão de 31 de Outubro de 2008)`

∗**10.1** *Gasiorowicz 10.2*

`Nota:` Este problema é muito importante, pois permite encontrar os estados próprios de qualquer operador que seja uma combinação linear de S_i. De facto, é fácil mostrar que uma combinação linear da forma

$$\mathcal{M} = c_x S_x + c_y S_y + c_y S_y$$

com

$$|c_x|^2 + |c_y|^2 + |c_z|^2 = 1 \ ,$$

é equivalente a

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\ e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\ e^{i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mostre este resultado, encontrando a relação entre c_x, c_y, c_z e α e β. Assim, pode agora usar os resultados deste problema na resolução dos problemas 10.2 e 10.4.

10.2 *Gasiorowicz 10.5*

10.3 *Gasiorowicz 10.7*

`Nota:` Este problema é equivalente a mostrar que

$$\sigma_i\, \sigma_j = \delta_{ij} + i\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k$$

∗**10.4** *Gasiorowicz 10.8*

10.5 *Gasiorowicz 10.10*

`Nota:` Este problema é equivalente a mostrar que (ver problema 10.3)

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

onde na última relação está subentendida a matriz identidade 2×2 no lado direito.

∗**10.6** *Gasiorowicz 10.11*

∗**10.7** *Gasiorowicz 10.12*

∗**10.8** *Gasiorowicz 10.13*

∗**10.9** *Gasiorowicz 10.14*

10.10 Na aula teórica apresentámos, sem demonstração, o resultado da adição de dois momentos angulares arbitrários (orbitais ou de spin). Recordamos aqui os resultados. Seja

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

onde os valores próprios de J_i^2 são $\hbar^2 j_i(j_i+1)$. Então temos os resultados seguintes:

1. Os valores próprios de J^2 são $\hbar^2 j(j+1)$. Os valores possíveis para j são

$$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$$

2. Qualquer estado $|j,m\rangle$ se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$ na seguinte forma

$$|j,m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C(j,m;j_1,m_1,j_2,m_2)\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle$$

onde $C(j,m;j_1,m_1,j_2,m_2)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 1 para os valores mais baixos de j_1 e j_2.

a) Consulte a tabela para verificar que no caso de spin 1/2 se obtém os resultados demonstrados na aula.

$$\begin{aligned}
&\texttt{Singleto}:\\
&|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1/2,1/2\rangle\,|1/2,-1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1/2,-1/2\rangle\,|1/2,1/2\rangle\\
&\texttt{Tripleto}:\\
&|1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle\,|1/2,1/2\rangle\\
&|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1/2,1/2\rangle\,|1/2,-1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1/2,-1/2\rangle\,|1/2,1/2\rangle\\
&|1,-1\rangle = |1/2,-1/2\rangle\,|1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

b) Mostre que a multiplicidade total é $(2j_1+1)(2j_2+1)$ como deveria ser. Para isso considere $j_1 > j_2$ e mostre que

$$[2(j_1+j_2)+1] + [2(j_1+j_2-1)+1] + \cdots + [2(j_1-j_2)+1] = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

Verifique, ver alínea a), que no caso de spin 1/2 temos 4 estados.

c) Para o problema do átomo de hidrogénio com spin vamos precisar da adição do momento angular orbital L com o spin do electrão. Os valores possíveis para $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ são $j = l \pm 1/2$ (para $l \geq 1$ claro, doutra forma para $l = 0$ temos $\vec{J} = \vec{S}$). Os resultados necessários são (Gasiorowicz, Eq. 10.82, a menos dum sinal global, na definição da segunda relação para estar de acordo com a tabela dos coeficientes Clebsch-Gordon),

$$\begin{aligned}
\psi_{l+1/2,m_j} &= \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}}Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^-\\
\psi_{l-1/2,m_j} &= -\sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}}Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^-
\end{aligned}$$

Use a tabela da Fig. 1 para verificar este resultado para $l = 1, 2$. Verifique que as multiplicidades estão correctas.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

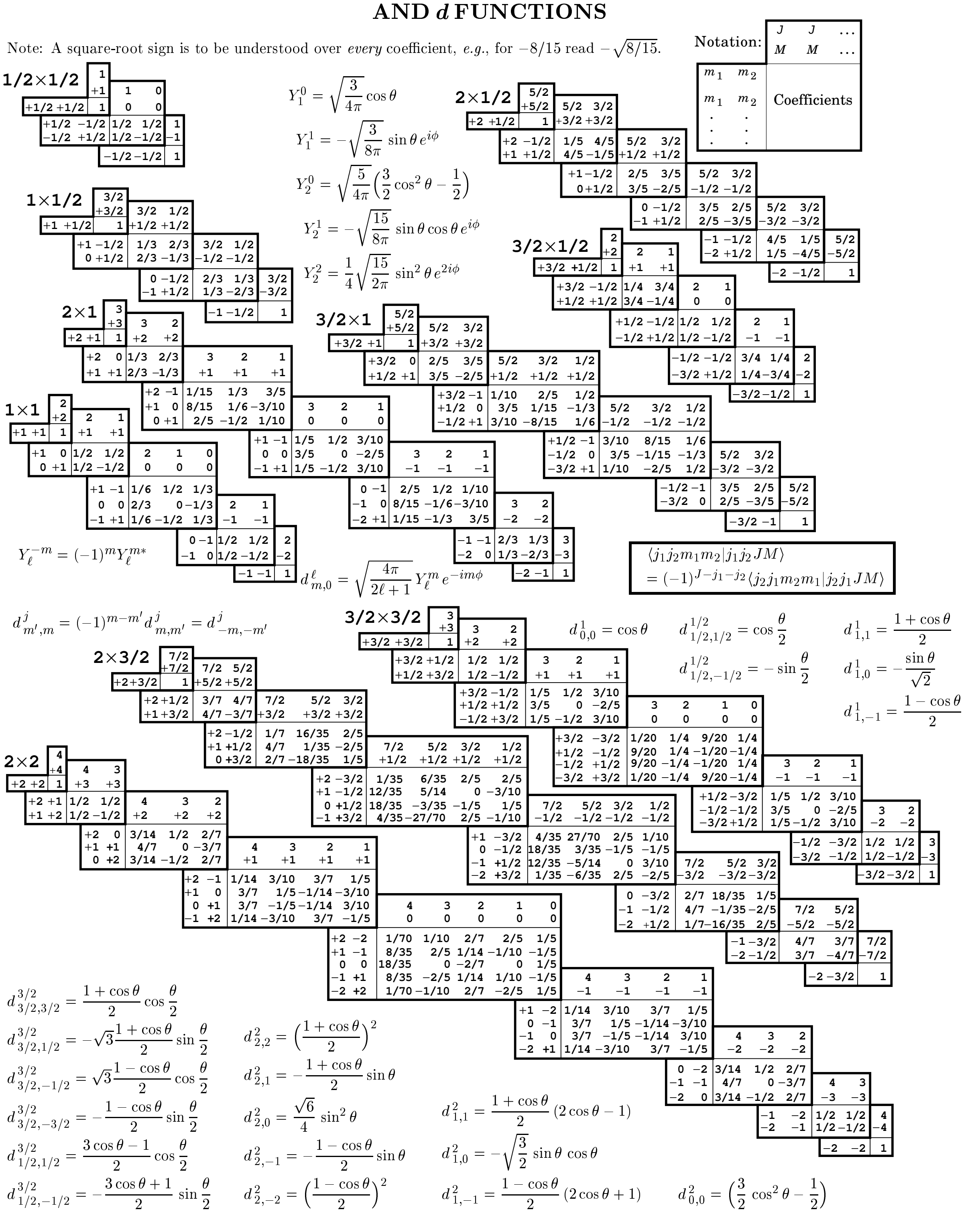

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figura 1: Coeficientes de Clebsch-Gordon para $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$. Fonte: Particle Data Group web page, `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf`