Mecânica Quântica – Série 2

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009

`Versão de 11/09/2008`

2.1 Em muitos dos problemas seguintes aparecem integrais gaussianos. Seja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

a) Utilize o `Mathematica` para verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = 1$$

b) Considere agora a função

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Utilizando mudanças de variáveis apropriadas mostre que está normalizada e que

$$\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

onde

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n g(x)$$

2.2 *Gasiorowicz 2.1*

`Sugestões/Soluções:`

1. O integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}}{k^2+\alpha^2}\, e^{i\,kx} dk$$

faz-se utilizando o teorema dos resíduos. O resultado é

$$\psi(x) = \mathcal{N}\frac{\pi}{\alpha}\left[e^{-\alpha x}\theta(x) + e^{\alpha x}\theta(-x)\right]$$

Pode verificar este resultado com o `Mathematica` pois $\psi(x)$ está relacionado com a Transformada de Fourier de $A(k)$ através de

$$\psi(x) = \sqrt{2\pi}\,\texttt{FourierTransform}[\mathcal{N}/(k^2+\alpha^2), k, x]$$

2. Utilize o `Mathematica` para fazer os integrais e obter:

$$\begin{aligned} \Delta k &= \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} = \alpha \\ \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \end{aligned}$$

2.3 *Gasiorowicz 2.2*

2.4 Para os dois problema seguintes deve usar o resultado da Eq. 2.13 do livro

$$|\psi(x,t)|^2 = \mathcal{N}^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}}\, e^{-\dfrac{\alpha(x-v_gt)^2}{\alpha^2+4\beta^2t^2}}$$

onde

$$v_g = \left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right)_{k=k_0}, \quad \beta = \left(\frac{\partial^2\omega(k)}{\partial k^2}\right)_{k=k_0},$$

a) Mostre que para $t = 0$ a largura deste pacote de ondas gaussiano é $\sigma_0 = \sqrt{\alpha/2}$, onde, como habitualmente, $\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$. Note que esta definição de largura difere ligeiramente da dada no livro. Utilize o `Mathematica` para fazer os integrais.

b) Mostre que $\sigma(t) = \sigma_0\sqrt{1+\frac{4\beta^2t^2}{\alpha^2}}$.

c) A constante $\mathcal{N}$ destina-se a normalizar a função de onda. Mostre que $\mathcal{N} = (\alpha/4\pi^3)^{1/4}$ e que não depende do tempo.

∗**2.5** *Gasiorowicz 2.6*

2.6 *Gasiorowicz 2.7*

∗**2.7** Uma das relações de Heisenberg relaciona a incerteza da energia dum sistema, ΔE, com a incerteza do tempo, Δt, da determinação da mesma: $\Delta E\Delta t \geq \hbar/2$. Determine a incerteza mínima da energia do estado dum átomo se o electrão permanece neste estado durante 10^{-8} s. Exprima o resultado em eV.

∗**2.8** a) O mesão π^+ tem a energia de repouso 140 MeV e o tempo de vida 26 ns. Determine a incerteza da energia em MeV, e como fracção da energia de repouso.

b) Repita para o mesão π^0 que tem a energia de repouso 135 MeV e o tempo de vida 8.3×10^{-17} s.

c) Repita para o mesão ρ que tem a energia de repouso 765 MeV e o tempo de vida 4.4×10^{-24} s.

2.9 *Gasiorowicz 2.11*

∗**2.10** *Gasiorowicz 2.15*

∗**2.11** *Gasiorowicz 2.16*

2.12 *Gasiorowicz 2.17*

`Comentários/Soluções:`

1. Obtemos para $\psi(p)$:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}}\, e^{-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}}$$

2. Verifique que $\psi(x)$ e $\psi(p)$ estão normalizadas.

3. A igualdade em
$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$
só ocorre para funções de onda gaussianas.

$*$2.13 *Gasiorowicz 2.18*

$*$2.14 Em $t = 0$, o estado duma partícula é representado pela função de onda
$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\,\dfrac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ A\,\dfrac{(b-x)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{outros } x, \end{cases}$$
onde A, a e b são constantes, reais e positivas.

a) Normalize Ψ, *i.e.*, determine A em termos de a e b.

b) Faça um esboço de $\Psi(x,0)$ como função de x.

c) Onde é que a partícula mais provavelmente será encontrada (em $t = 0$)?

d) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de a? Verifique a validade do seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$.

e) Determine o valor esperado (médio) de x, $\langle x \rangle$.

$*$2.15 Uma partícula é representada, no instante $t = 0$, pela função de onda
$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{outros } x. \end{cases}$$
onde A é uma constante real e positiva.

a) Determine a constante de normalização A.

b) Calcule o valor médio de x (em $t = 0$).

c) Calcule o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda em termos das coordenadas, $\Psi(x,0)$.

d) Determine a função de onda no espaço dos momentos $\phi(p)$. Faça um esboço dessa função. Calcule agora o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda $\phi(p)$.

$*$2.16 Para a função de onda do problema anterior determine:

a) O valor médio de x^2.

b) O valor médio de p^2.

c) A incerteza em x, σ_x.

d) a incerteza em p, σ_p.

e) Verifique que os resultados são compatíveis com o princípio de incerteza de Heisenberg.

2.17 *Adaptado de Griffiths 1.18*

Em geral, a mecânica quântica é relevante quando o comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, é maior que o tamanho característico do sistema, d. Em equilíbrio térmico à temperatura absoluta T, a energia cinética média é

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

onde $k_B = 1.380 \times 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K é a constante de Boltzmann.

a) Mostre que o comprimento de de Broglie típico é dado por

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}} = 6.23 \left(\frac{m_e}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{300 \text{ K}}{T(\text{ K})}\right)^{1/2} \text{ nm}$$

b) Sabendo que o espaçamento típico dos sólidos e líquidos é $d \simeq 0.3$ nm, verifique que para as temperaturas usuais os electrões livres nos sólidos devem obedecer à mecânica quântica enquanto que os núcleos não. Tome o sódio como exemplo com $m_{NA} \simeq 23m_p \simeq 42300m_e$. Verifique que o hélio abaixo de 4 K é uma excepção.

c) Mostre que os átomos num gás ideal devem obedecer à mecânica quântica para temperaturas tais que

$$T < \frac{1}{k_B} \left(\frac{h^2}{3m}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

onde P é a pressão. `Sugestão:` Use a lei dos gases perfeitos, $PV = Nk_BT$, para deduzir o espaçamento interatómico num gás. Verifique com o hélio à pressão atmosférica.

d) Use os resultados da alínea c) para se decidir se o hidrogénio no espaço interestelar, onde $d = 1$ cm e $T \simeq 3$ K tem comportamento quântico.