1º teste MQ - 6/11/2008

I

1) **Falsa**: só se $[A,B]=0$

2) **Verdadeira**: $u^*_{n+2}(x)\, u_n(x)\, x$ é uma função ímpar

3) **Verdadeira**: $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \in \left[\frac{\pi^2}{4}, \pi^2\right] \Rightarrow$ 1 solução par + 1 solução ímpar

4) **Verdadeira**: $p^2 = 2mE \Rightarrow \langle p^2\rangle = 2m\langle E\rangle$

II

1) $\psi(x,0) = \sum_n A_n u_n(x) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $A_4 = B$; $A_n = 0 \quad n \neq 1,4$

$$\sum_n |A_n|^2 = 1 \Rightarrow |A_1|^2 + |A_4|^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + B^2 = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(real e positivo B)

2) $\langle E\rangle = \sum_n |A_n|^2 E_n$

$$= \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_4 = \left(\frac{1}{3} + \frac{32}{3}\right)E_1 = 11\,E_1 = 11\,\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

3) $$P(x<a/2) = \int_0^{a/2} dx\, |\psi(x,0)|^2 = \int_0^{a/2} dx \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{4\pi x}{a}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{a}\int_0^{a/2} dx\, \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{4}{3}\frac{1}{a}\int_0^{a/2} dx\, \sin^2\frac{4\pi x}{a}$$

$$+ \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{1}{a}\int_0^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dy\,\sin^2 y + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dy\,\sin^2 y + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dy\,\sin y\,\sin 4y$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{4} + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\left[\frac{1}{6}\sin 3y - \frac{1}{10}\sin 5y\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} - \frac{16\sqrt{2}}{45\pi} < 1/2$$

<u>logo</u>: A probabilidade de encontrar a partícula entre $[0, a/2]$ é menor que $1/2$.

4) $\langle E\rangle_t = \langle E\rangle_{t=0} = 11\,\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

– <u>Demonstração 1</u>

Vimos que para um operador genérico

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle$$

Como $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ e $[H,H]=0$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\langle H\rangle = 0$$

– <u>Demonstração 2</u>

$$\langle E\rangle_t = \int_0^a dx\,\psi^*(x,t)\,H\,\psi(x,t)$$

$$= \int_0^a dx\left(\sum_n A_n^*\,u_n^*(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}\right) H\left(\sum_m A_m\,u_m(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\right)$$

$$= \sum_n \sum_m A_n^* A_m \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \; E_m \int_0^a dx \; u_n^*(x) \, u_m(x)$$

onde se usou $H u_m(x) = E_m u_m(x)$. Usando agora

$$\int_0^a dx \; u_m^*(x) \, u_n(x) = \delta_{nm}$$

obtemos

$$\langle E \rangle_t = \sum_n |A_n|^2 E_n = \langle E \rangle_{t=0}$$

III

1) <u>região I</u>

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0 \qquad \text{com} \qquad \alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

<u>região II</u>

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q^2 u = 0 \qquad \text{com} \qquad q^2 = \frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2}$$

<u>região III</u> $\quad u_{III} = 0$

Portanto as soluções com as boas condições assintóticas são

$$\begin{cases} u_I(x) = A \, e^{\alpha x} & x < -a \\ u_{II}(x) = B \sin qx & -a < x < 0 \end{cases}$$

igualando $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ em $x = -a$ obtemos

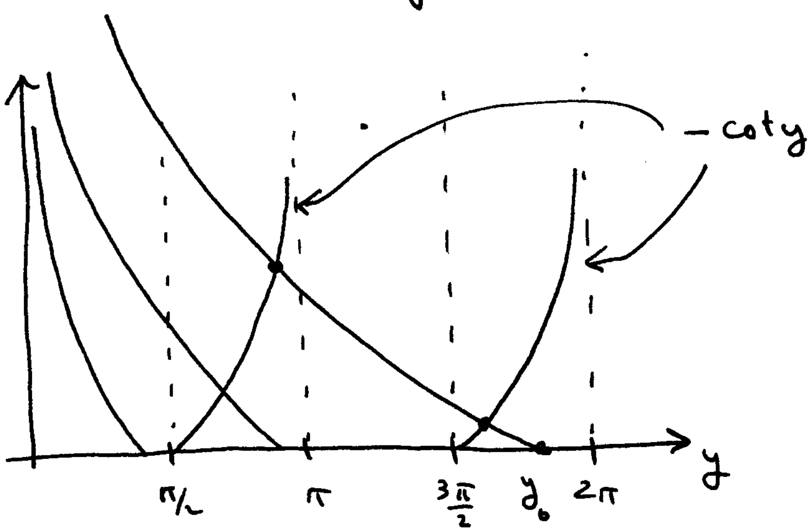
$$\alpha = q\cot(-qa) = -q\cot(qa)$$

e portanto

$$\boxed{\cot(qa) = -\frac{\alpha}{q}}$$

2) fazendo $y = qa$ e $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ obtemos

$$-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$



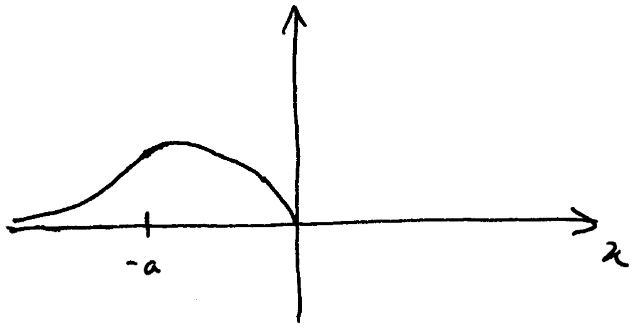
A condição para haver estado ligado é $\lambda \geq \pi^2/4$ ou seja

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \geq \pi^2/4 \Rightarrow V_0 \geq \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

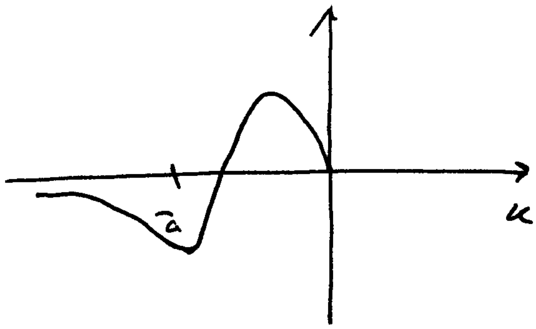
3) $V_0 = \frac{18\hbar^2}{ma^2} \Rightarrow \lambda = \frac{2ma^2}{\hbar^2}\frac{18\hbar^2}{ma^2} = 36$

Portanto a intersecção com o eixo dos y dá-se para $y_0 = \sqrt{\lambda} = 6$. Como $\frac{3\pi}{2} < y_0 < 2\pi$ temos <u>dois</u> estados ligados.

4)



estado fundamental



1º estado excitado

5) Neste caso:

$$u_I = e^{ikx} + R e^{-ikx} \quad ; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$u_{II} = A \sin qx \quad ; \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E) \quad (E>0)$$

A igualdade de $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ em $x=-a$ dá

$$ik \left. \frac{e^{ikx} - R e^{-ikx}}{e^{ikx} + R e^{-ikx}} \right|_{x=-a} = -q \cot qa$$

ou seja

$$ik \frac{e^{-ika} - R e^{ika}}{e^{-ika} + R e^{ika}} = -q \cot qa$$

e portanto

$$ik \left(e^{-ika} - R e^{ika}\right) = -q \cot qa \left(e^{-ika} + R e^{ika}\right)$$

$$R e^{ika}\left(-ik + q \cot qa\right) = e^{-ika}\left(-ik - q \cot qa\right)$$

e finalmente

$$R = e^{-2ika} \frac{-ik - q\cot qa}{-ik + q\cot qa}$$

com $|R| = 1$.

No limite $V_0 \to 0$ temos $q \to k$. Portanto

$$R = e^{-2ika} \frac{-ik - k\cot ka}{-ik + k\cot ka}$$

$$= -e^{-2ika} \frac{\cos ka + i\sin ka}{\cos ka - i\sin ka}$$

$$= -e^{-2ika} \frac{e^{ika}}{e^{-ika}} = -1$$

No limite $V_0 \to 0$ deixa de haver região II e portanto a função

$$u_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

tem que se anular para $x=0$

$$0 = 1 + R \Rightarrow R = -1 .$$