Mecânica Quântica – Exame – 20/1/2010

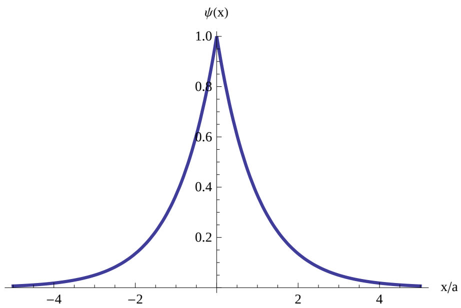
Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010
Duração 3h

1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se A for um operador hermítico, então o operador $B = e^A$ também é hermítico.
2. Considere a função de onda representada na figura



Sabe-se que esta função representa a função de onda duma partícula sob a acção dum potencial $V(x) = \beta\delta(x)$. Então $\beta > 0$.

3. Considere um poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ x > |a|$. Se

$$\lambda \in \left[\frac{\pi^2}{4}, \pi^2\right]$$

onde $\lambda = 2mV_o a^2/\hbar^2$, então existem dois estados ligados para este potencial.

4. No oscilador harmónico, a uma dimensão, tem-se sempre

$$\left\langle n|x^3|n+1\right\rangle = 0$$

II (4 valores)

Uma partícula encontra-se no potencial dum oscilador harmónico uni-dimensional com frequência angular clássica ω. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_0(x) + A\, u_1(x),$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, com a energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e A é uma constante real e positiva.

1. Qual é a probabilidade de obter a energia E_0 numa medição?

2. Calcule o valor médio da energia da partícula (em múltiplos de $\hbar\omega$).

3. No instante de tempo $t = 0$ é mais provável encontrar a partícula no intervalo $]-\infty, 0]$ ou no intervalo $[0, \infty[$? Se pensar e justificar não precisa de fazer as contas. No entanto os integrais necessários estão no formulário.

4. Escreva a expressão para $|\Psi(x,t)|^2$ em função de $u_0(x)$, $u_1(x)$, da frequência de oscilação ω e do tempo t. Qual o período de oscilação?

III (4 valores)

Considere o problema do poço de potencial infinito a uma dimensão, de largura a:

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & x < -a/2 \\ 0 & -a/2 < x < a/2 \\ \infty & x > a/2 \end{cases} .$$

cujas funções próprias e valores próprios estão no formulário.

1. Desenhe a função de onda para o estado fundamental.

2. Considere agora que é adicionado a este potencial um potencial da forma

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\beta}{a}\,\delta(x)$$

onde a constante $\beta > 0$, é adimensional. Mostre que as condições para estados ligados são agora

$$\begin{cases} \tan\dfrac{y}{2} = -\dfrac{2y}{\beta} & & (1) \\ \text{ou} & & \\ y = 2n\pi & n = 1, 2, \ldots & (2) \end{cases}$$

onde, como habitualmente, $y = ka$ e $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Para perceber melhor o que isto quer dizer, faça um gráfico da condição (1) e explique porque é que a condição (2) é um subconjunto das soluções do problema do poço de potencial infinito da alínea 1).

3. Desenhe a função de onda para o estado fundamental nas condições da alínea anterior.

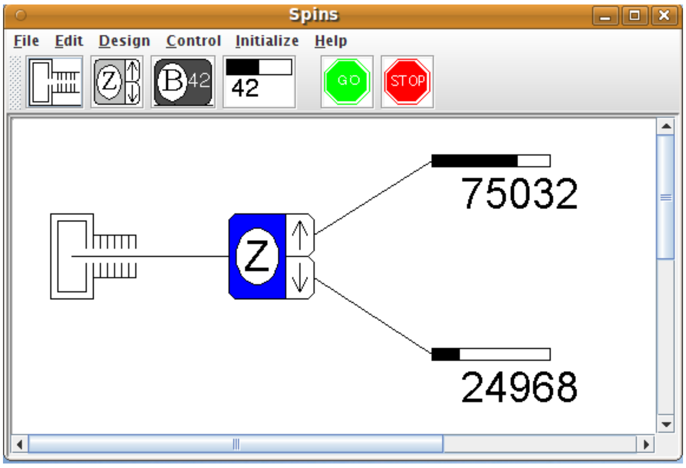
4. Verifique que no limite $\beta \to 0$ obtém os resultados do poço de potencial infinito da alínea 1).

5. Encontre o valor da energia do estado fundamental no limite $\beta \to \infty$. Consegue explicar este resultado em termos simples? (**Sugestão:** faça um gráfico do estado fundamental nesse limite).

IV (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de electrões detectados depois de terem sido *disparados* 100000 electrões num dado estado e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos z. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal.

2. O traço das matrizes L_i que representam o momento angular no subespaço com valores próprios de $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ é nulo.

3. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A e^{-r^2/r_0^2}\ \sin^2\theta\cos 2\varphi$$

A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = \hbar$ é $1/6$.

4. Considere uma partícula no estado fundamental do oscilador harmónico a uma dimensão com energia $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Aplica-se uma perturbação $H_1 = \lambda\, x$. A correcção, de 1ª ordem, à energia do estado fundamental é dada por $\Delta E_0 = 0$.

V (2 valores)

Considere uma partícula que se move a três dimensões num potencial esfericamente simétrico dado por

$$V(r) = \begin{cases} \infty & 0 < r < a \\ 0 & a < r < b \\ \infty & r > b \end{cases}$$

1. Determine a energia do estado fundamental, isto é a energia mais baixa para as soluções com $l = 0$. (**Nota:** A equação radial para problemas com simetria esférica está no formulário).

2. Escreva a função de onda para o estado fundamental. Não precisa de normalizar.

VI (3 valores)

Os átomos alcalinos têm uma estrutura electrónica que é aproximadamente do tipo do átomo de hidrogénio, já que as suas propriedades são essencialmente determinadas por um electrão. Como modelo para esses átomos tomamos

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \beta\,\frac{a_0}{Zr^2}\right) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\beta\,\frac{a_0}{r^2}$$

onde a_0 é o raio de Bohr e β é uma constante sem dimensões.

1. Considere que $\beta \ll 1$ e use teoria de perturbações para calcular a correcção às energias dos estados $|n, l, m\rangle$ do Hamiltoniano não perturbado.

2. O resultado exacto para as energias do potencial acima é dado por

$$E_{nl} = -\frac{1}{2} m_e c^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{(n - \epsilon_l)^2}$$

onde

$$\epsilon_l = \frac{(2l+1) - \sqrt{(2l+1)^2 - 8\beta}}{2}$$

válida para $\beta \leq \frac{1}{8}(2l+1)^2$. Verifique o seu resultado de teoria de perturbações, expandindo o resultado exacto até à primeira ordem em β.

VII (3 valores)

Considere uma partícula de spin 1/2 com o seguinte Hamiltoniano

$$H = \frac{4A}{\hbar^2} S_z^2 + \frac{2B}{\hbar} S_x$$

onde $|B| \ll |A|$. Considere a base onde S^2 e S_z são diagonais, isto é, os vectores próprios $\left|\frac{1}{2}, m\right\rangle$ com

$$S^2 \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle, \quad S_z \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle = \hbar m \left|\frac{1}{2}, m\right\rangle$$

1. Mostre que, nesta base, o Hamiltoniano de pode escrever na forma matricial

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Quais as dimensões das constantes A e B?

2. Encontre os valores próprios e vectores próprios deste Hamiltoniano. Que aconteceria se tentasse usar teoria de perturbações?

3. Faça um desenho dos níveis de energia (valores próprios de H) com $B = 0$ e com $B \neq 0$.