# Mecânica Quântica – Série 6

**Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010**

(Versão de 29/11/2009)

**∗6.1** *Gasiorowicz 6.1*

**∗6.2** *Gasiorowicz 6.3*

**6.3** *Gasiorowicz 6.4*

**∗6.4** *Gasiorowicz 6.5*

**∗6.5** *Gasiorowicz 6.11*

**6.6** *Gasiorowicz 6.12*

**6.7** *Adaptado de Griffiths 3.35*

Considere os estados coerentes do problema anterior.

a) Calcule, para estes estados, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ e mostre que $\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, isto é a incerteza é mínima, tal como para estados gaussianos.

b) Introduza a dependência temporal

$$|n\rangle \to |n\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

e mostre que o estado $|\alpha(t)\rangle$ continua a ser um estado coerente, isto é,

$$A \, |\alpha(t)\rangle = \alpha(t) \, |\alpha(t)\rangle$$

onde

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \; \alpha$$

**∗6.8** *Gasiorowicz 6.14*

**6.9** *Adaptado de Griffiths 3.39*

a) Para uma função $f(x)$ que possa ser expandida em série de Taylor, mostre que

$$f(x + x_0) = e^{\frac{i}{\hbar} x_0 p_{\text{op}}} \; f(x)$$

onde $x_0$ é qualquer distância constante e $p_{\text{op}} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ é o operador momento. Por esta razão se diz que $p_{\text{op}}/\hbar$ é o **gerador das translações no espaço**.

b) Se $\psi(x, t)$ satisfizer a equação de Schrödinger, mostre que

$$\psi(x, t + t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \; t_0 H} \; \psi(x, t)$$

onde $t_0$ é um tempo constante. Por isso se diz que $-H/\hbar$ é o **gerador das translações no tempo**.

**6.10** Considere um problema a uma dimensão com

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

1. Mostre que
$$\sum_n (E_n - E_m)|\langle n|\, x\, |m\rangle|^2 = C$$
onde $C$ é uma constante e $m$ é qualquer estado diferente de $n$. Mostre que $C = \hbar^2/2m$ e é portanto independente do potencial $V(x)$. Este resultado é conhecido pela *regra de soma de Thomas- Reiche- Kuhn.* **Sugestão:** Comece por mostrar que
$$\Big[[H,x],x\Big] = -\frac{\hbar^2}{m}$$
e depois calcule $\langle m|\, \Big[[H,x],x\Big]\, |m\rangle$ usando a expressão anterior e usando $\Big[[H,x],x\Big] = Hx^2 - 2xHx + x^2H$.

   Embora esta regra seja válida para qualquer valor $m$, vamos nas alíneas seguintes considerar o caso de $m = 0$.

2. Verifique para o caso do oscilador harmónico,

3. Verifique para o caso da partícula no poço de potencial infinito. Para mostrar este resultado deve usar
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(4m^2-1)^3} = \frac{\pi^2}{256}$$

4. Verifique para o caso do *meio* oscilador harmónico do Problema 4.12. Para mostrar este resultado terá que mostrar sucessivamente:
   - As funções de onda ($x \geq 0$ com $u_n(0) = 0$) e as energias são:
$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{4^n(2n+1)!}}\, e^{-y^2/2} H_{2n+1}(y), \quad y = \frac{m\omega}{\hbar}x \\ E_n &= \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$
   - O valor de $\langle n|\, x\, |0\rangle$ é dado por (use o `mathematica`)
$$\langle n|\, x\, |0\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\, \frac{\sqrt{4^n}}{\sqrt{(1+2n)!}\ \Gamma(3/2-n)}$$
   - Use o `mathematica` para mostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ 4^{n+1}}{(1+2n)!\ \Gamma(3/2-n)^2} = 1$$
   e assim mostrar o pretendido.

5. Verifique o teorema para o caso do potencial linear do Problema 4.17.

6. Considere agora o caso do potencial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda}{a}\delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -L \\ 0 & -L < x < L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

isto é, um poço de potencial infinito com uma função delta na origem. Verifique o teorema da alínea 1). Este problema é particularmente interessante pois para $L$ suficientemente grande, existe sempre um estado ligado (verifique que há um estado ligado se $\lambda > 2a/L$, ver abaixo) e estamos numa situação em que temos estados ligados com $E < 0$ e estados com $E > 0$. Se o teorema for verificado para qualquer valor de $L$, então quando $L \to \infty$, verificamos o teorema para estados ligados e estados de difusão, que para evitar problemas de normalização estamos a normalizar numa caixa de largura $2L$. Como o resultado não depende de $L$ no final podemos fazer as paredes ir para infinito.

Os passos para fazer este problema são:

- Defina, como habitualmente, para o estado de energia negativa,

$$E_0 = -\alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m}, \; y = \alpha a$$

- Para trabalhar com grandezas adimensionais introduza a variável

$$\eta = \frac{L}{a}$$

  Com estas definições verifique que a condição para os estados ligados de energia negativa é

$$\tanh(y\,\eta) = \frac{2y}{\lambda} \tag{1}$$

  que tem sempre solução se $\lambda > 2/\eta$.

- Verifique que as soluções pares para $E > 0$ têm energias que são soluções da equação

$$\tan(y\,\eta) = \frac{2y}{\lambda}$$

  enquanto que as soluções ímpares são que as soluções ímpares para um caixa entre $-L < x < L$ (porquê?). Então as energias das soluções ímpares são

$$E_n^- = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}(2n)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2 a^2}$$

- Verifique que para as soluções pares se tem

$$\langle n; \text{even}|\, x\, |0\rangle = 0$$

  enquanto que para as soluções ímpares temos ($x = a\xi$)

$$\langle n; \text{odd}|\, x\, |0\rangle = a \int_{-\eta}^{\eta} d\xi\, u_n^-(\xi)\, \xi\, u_0(\xi) \neq 0$$

onde

$$u_n^-(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\eta}} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\eta}\right), \qquad \int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, \left(u_n^-(\xi)\right)^2 = 1$$

e

$$u_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \; \sinh\left[y_0(\xi+\eta)\right] & , \quad -\eta < \xi < 0 \\ \sqrt{\dfrac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \; \sinh\left[y_0(\eta-\xi)\right] & , \quad 0 < \xi < \eta \end{cases}$$

onde $y_0$ é a solução da Eq.(1) e $u_0(\xi)$ satisfaz,

$$\int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, \left[u_0(\xi)\right]^2 = 1$$

- Agora temos todas as peças para resolver o problema. Obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_n \left(E_n^- - E_0\right) |\, \langle n; \mathrm{odd}|\, x\, |0\rangle\, |^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2 a^2} - \frac{y_0^2}{a^2}\right) a^2 |\, \langle n; \mathrm{odd}|\, \xi\, |0\rangle\, |^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} g(\eta) \end{aligned} \tag{2}$$

onde

$$g(\eta) = \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2} - y_0^2\right) \left[\int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, u_n^-(\xi)\, \xi\, u_0(\xi)\right]^2 \tag{3}$$

A verificação é agora que devemos ter $g(\eta) = 1$ para todos os valores de $\eta$.

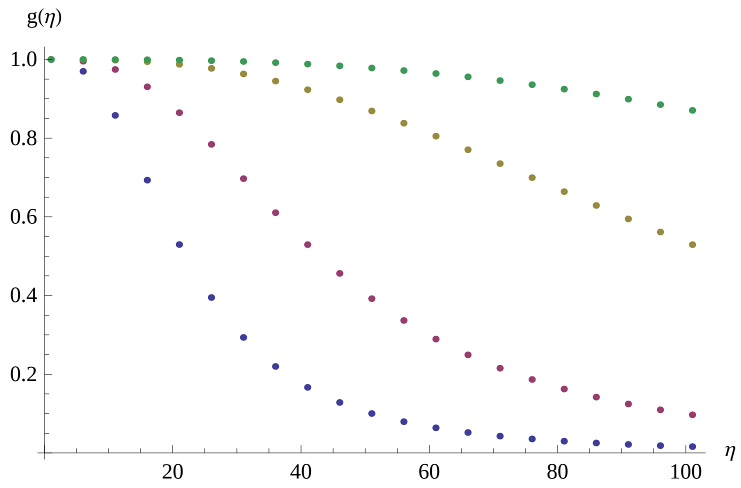


Figure 1: Gráfico da função $g(\eta)$ em função de $\eta$ para vários valores do número de termos que se consideram na série da Eq.(3): $n_{max} = 10, 20, 50$ e $100$, respectivamente de baixo para cima.

Isto tem de ser feito numericamente e está indicado na figura anterior. É claro que quando se somam um número suficientemente grande de termos na Eq.(3) se obtém $g(\eta) = 1$ para qualquer valor de $\eta$.