Mecânica Quântica – Série 5

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2013/2014

(Versão de 29/10/2013)

5.1 Mostre que os valores próprios dum operador hermítico são reais.

∗**5.2** *Gasiorowicz 5.1*
Use a definição de operador hermítico,

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) A \Psi(x) = \int_{\infty}^{\infty} dx (A\Psi^*(x))^* \Psi(x)$$

para mostrar que para um operador hermítico A se tem

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) A \psi(x) = \int_{\infty}^{\infty} dx (A\phi^*(x))^* \psi(x)$$

Sugestão: Faça $\Psi = \phi + \lambda\psi$ e use o facto de que λ é um número complexo arbitrário.

5.3 *Gasiorowicz 5.3*
Mostre que se A é um operador hermítico, então $\langle A^2 \rangle$ é um número positivo.

∗**5.4** *Gasiorowicz 5.5*
Um operador U é unitário se $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$. Mostre que se H for hermítico então $U = e^{iH}$ é unitário.

∗**5.5** *Gasiorowicz 5.8*
Mostre que o valor próprio λ dum operador unitário U deve ser da forma $\lambda = e^{ia}$
Sugestão: Escreva

$$\int_{\infty}^{\infty} dx (U\psi(x))^* U\psi(x)$$

de duas maneiras diferentes.

5.6 *Gasiorowicz 5.10*
Considere um conjunto completo de funções próprias ortonormalizadas de um operador A, designadas por $u_n(x)$. Dado um operador unitário U, podemos construir outro conjunto $v_a(x) = Uu_a(x)$. Mostre que o novo conjunto é também ortonormalizado, isto é

$$\int_{\infty}^{\infty} dx v_a^*(x) v_b(x) = \delta_{ab}$$

∗**5.7** *Gasiorowicz 5.11*
Operadores que não comutam obedecem a um certo número de relações. Mostre as seguintes:

a) Se A e B são hermíticos então $i\,[A, B]$ também é hermítico.

b) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

c) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Identidade de Jacobi)

∗ 5.8 *Gasiorowicz 5.12*
Expandindo as exponenciais mostre que

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$$

∗ 5.9 *Gasiorowicz 5.17*
Um eletrão num campo elétrico oscilante é descrito pelo operador Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} - (eE_0 \cos \omega t)x$$

Calcule as expressões para a dependência no tempo de $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle H \rangle$.

5.10 *Gasiorowicz 5.18*
Resolva as equações do movimento que obteve no problema anterior. Escreva as soluções em termos de $\langle x \rangle_0$ e $\langle p \rangle_0$, os valores médios para $t = 0$.