Mecânica Quântica – Série 6

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2013/2014

(Versão de 28/10/2013)

∗6.1 *Gasiorowicz 6.1*

a) Mostre que os valores próprios dum operador hermítico $A = A^\dagger$ são reais

b) Mostre que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. **Sugestão:** Mostre que $\left\langle \psi | (AB)^\dagger | \psi \right\rangle = \left\langle \psi | B^\dagger A^\dagger | \psi \right\rangle$.

∗6.2 *Gasiorowicz 6.3*

Considere o oscilador harmónico. Mostre que se tem

$$A \left| n \right\rangle = \sqrt{n} \left| n-1 \right\rangle$$

6.3 *Gasiorowicz 6.4*

Mostre que se $f(A^\dagger)$ é um polinómio em $A^\dagger$ então

$$A f(A^\dagger) \left| 0 \right\rangle = \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger} \left| 0 \right\rangle$$

Sugestão: Use o resultado

$$A (A^\dagger)^n \left| 0 \right\rangle = n (A^\dagger)^{n-1} \left| 0 \right\rangle$$

∗6.4 *Gasiorowicz 6.5*

Para o oscilador harmónico calcule $\langle m | x | n \rangle$ e mostre que é nulo exceto para $n = m \pm 1$.

∗6.5 *Gasiorowicz 6.11*

Use a definição $(\Delta x)^2 = \langle n | x^2 | n \rangle - \langle n | x | n \rangle^2$ e de modo semelhante para $(\Delta p)^2$ para calcular $\Delta x \, \Delta p$ para o estado $\left| n \right\rangle$ do oscilador harmónico.

6.6 *Gasiorowicz 6.12*

Um estado $\left| \alpha \right\rangle$ que obedece à equação $A \left| \alpha \right\rangle = \alpha \left| \alpha \right\rangle$ onde A é o operador de aniquilação do oscilador harmónico, designa-se por *estado coerente*.

a) Mostre que o estado $\left| \alpha \right\rangle$ pode ser escrito na forma

$$\left| \alpha \right\rangle = C e^{\alpha A^\dagger} \left| 0 \right\rangle$$

b) Use o resultado do problema 6.3 para encontrar C.

c) Expanda o estado $\left| \alpha \right\rangle$ nos estado próprios do operador *número* $N = A^\dagger A$, isto é $\left| n \right\rangle$. Use isto para calcular a probabilidade que um estado coerente contém n partículas. Esta distribuição é conhecida em estatística por distribuição de Poisson.

d) Calcule $\langle\alpha|N\alpha\rangle$, isto é o número médio de partículas num estado coerente.

6.7 *Adaptado de Griffiths 3.35*

Considere os estados coerentes do problema anterior.

a) Calcule, para estes estados, $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$ e $\langle p^2\rangle$ e mostre que $\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2}$, isto é a incerteza é mínima, tal como para estados gaussianos.

b) Introduza a dependência temporal

$$|n\rangle \to |n\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

e mostre que o estado $|\alpha(t)\rangle$ continua a ser um estado coerente, isto é,

$$A\,|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\,|\alpha(t)\rangle$$

onde

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\ \alpha$$

$*$**6.8** *Gasiorowicz 6.14*

Considere um Hamiltoniano que descreve uma partícula carregada num potencial dum oscilador harmónico a uma dimensão num campo elétrico exterior

$$H = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t) - r\mathcal{E}x(t) \tag{1}$$

a) Calcule a equação de movimento para os operadores $p(t)$ e $x(t)$. Mostre que as equações de movimento são as equações clássicas.

b) Encontre $p(t)$ e $x(t)$ em termos de $p(0)$ e $x(0)$.

c) Mostre que para $t_1 \neq t_2$ se tem

$$[x(t_1), x(t_2)] \neq 0 \tag{2}$$

6.9 *Adaptado de Griffiths 3.39*

a) Para uma função $f(x)$ que possa ser expandida em série de Taylor, mostre que

$$f(x + x_0) = e^{\frac{i}{\hbar}x_0 p_{\rm op}}\ f(x)$$

onde x_0 é qualquer distância constante e $p_{\rm op} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ é o operador momento. Por esta razão se diz que $p_{\rm op}/\hbar$ é o **gerador das translações no espaço**.

b) Se $\psi(x,t)$ satisfizer a equação de Schrödinger, mostre que

$$\psi(x, t + t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\ t_0 H}\ \psi(x,t)$$

onde t_0 é um tempo constante. Por isso se diz que $-H/\hbar$ é o **gerador das translações no tempo**.

6.10 Considere um problema a uma dimensão com

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

1. Mostre que
$$\sum_n (E_n - E_m)| \langle n| x |m\rangle |^2 = C$$
onde C é uma constante e m é qualquer estado diferente de n. Mostre que $C = \hbar^2/2m$ e é portanto independente do potencial $V(x)$. Este resultado é conhecido pela *regra de soma de Thomas- Reiche- Kuhn*. **Sugestão:** Comece por mostrar que
$$\Big[[H,x],x\Big] = -\frac{\hbar^2}{m}$$
e depois calcule $\langle m| \Big[[H,x],x\Big] |m\rangle$ usando a expressão anterior e usando $\Big[[H,x],x\Big] = Hx^2 - 2xHx + x^2H$.

   Embora esta regra seja válida para qualquer valor m, vamos nas alíneas seguintes considerar o caso de $m = 0$.

2. Verifique para o caso do oscilador harmónico,

3. Verifique para o caso da partícula no poço de potencial infinito. Para mostrar este resultado deve usar
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(4m^2-1)^3} = \frac{\pi^2}{256}$$

4. Verifique para o caso do *meio* oscilador harmónico do Problema 4.12. Para mostrar este resultado terá que mostrar sucessivamente:

   - As funções de onda ($x \geq 0$ com $u_n(0) = 0$) e as energias são:
$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{4^n(2n+1)!}}\, e^{-y^2/2} H_{2n+1}(y), \quad y = \frac{m\omega}{\hbar}x \\ E_n &= \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$
   - O valor de $\langle n| x |0\rangle$ é dado por (use o `mathematica`)
$$\langle n| x |0\rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\sqrt{4^n}}{\sqrt{(1+2n)!\ \Gamma(3/2-n)}}$$
   - Use o `mathematica` para mostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ 4^{n+1}}{(1+2n)!\ \Gamma(3/2-n)^2} = 1$$
   e assim mostrar o pretendido.

5. Verifique o teorema para o caso do potencial linear do Problema 4.17.

6. Considere agora o caso do potencial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda}{a}\delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -L \\ 0 & -L < x < L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

isto é, um poço de potencial infinito com uma função delta na origem. Verifique o teorema da alínea 1). Este problema é particularmente interessante pois para L suficientemente grande, existe sempre um estado ligado (verifique que há um estado ligado se $\lambda > 2a/L$, ver abaixo) e estamos numa situação em que temos estados ligados com $E < 0$ e estados com $E > 0$. Se o teorema for verificado para qualquer valor de L, então quando $L \to \infty$, verificamos o teorema para estados ligados e estados de difusão, que para evitar problemas de normalização estamos a normalizar numa caixa de largura $2L$. Como o resultado não depende de L no final podemos fazer as paredes ir para infinito.

Os passos para fazer este problema são:

- Defina, como habitualmente, para o estado de energia negativa,

$$E_0 = -\alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m}, \; y = \alpha a$$

- Para trabalhar com grandezas adimensionais introduza a variável

$$\eta = \frac{L}{a}$$

  Com estas definições verifique que a condição para os estados ligados de energia negativa é

$$\tanh(y\,\eta) = \frac{2y}{\lambda} \tag{3}$$

  que tem sempre solução se $\lambda > 2/\eta$.

- Verifique que as soluções pares para $E > 0$ têm energias que são soluções da equação

$$\tan(y\,\eta) = \frac{2y}{\lambda}$$

  enquanto que as soluções ímpares são que as soluções ímpares para um caixa entre $-L < x < L$ (porquê?). Então as energias das soluções ímpares são

$$E_n^- = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}(2n)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2 a^2}$$

- Verifique que para as soluções pares se tem

$$\langle n; \text{even}|\, x\, |0\rangle = 0$$

  enquanto que para as soluções ímpares temos ($x = a\xi$)

$$\langle n; \text{odd}|\, x\, |0\rangle = a \int_{-\eta}^{\eta} d\xi\, u_n^-(\xi)\, \xi\, u_0(\xi) \neq 0$$

onde

$$u_n^-(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\eta}} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\eta}\right), \quad \int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, \left(u_n^-(\xi)\right)^2 = 1$$

e

$$u_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \sinh\left[y_0(\xi+\eta)\right] & , \quad -\eta < \xi < 0 \\ \sqrt{\dfrac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \sinh\left[y_0(\eta-\xi)\right] & , \quad 0 < \xi < \eta \end{cases}$$

onde y_0 é a solução da Eq.(3) e $u_0(\xi)$ satisfaz,

$$\int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, \left[u_0(\xi)\right]^2 = 1$$

- Agora temos todas as peças para resolver o problema. Obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_n \left(E_n^- - E_0\right) |\, \langle n; \text{odd}|\, x \,|0\rangle \,|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2 a^2} - \frac{y_0^2}{a^2}\right) a^2 |\, \langle n; \text{odd}|\, \xi \,|0\rangle \,|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} g(\eta) \end{aligned} \tag{4}$$

onde

$$g(\eta) = \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2} - y_0^2\right) \left[\int_{-\eta}^{\eta} d\xi \, u_n^-(\xi)\, \xi \, u_0(\xi)\right]^2 \tag{5}$$

A verificação é agora que devemos ter $g(\eta) = 1$ para todos os valores de η.

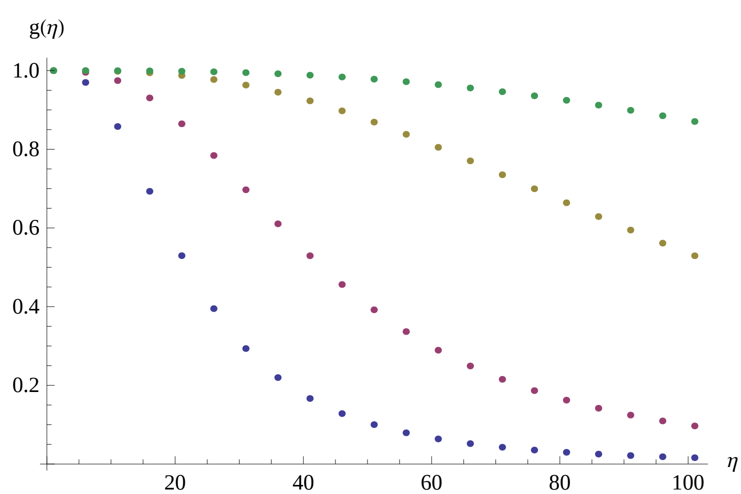

Figure 1: Gráfico da função $g(\eta)$ em função de η para vários valores do número de termos que se consideram na série da Eq.(5): $n_{max} = 10, 20, 50$ e 100, respetivamente de baixo para cima.

Isto tem de ser feito numericamente e está indicado na figura anterior. É claro que quando se somam um número suficientemente grande de termos na Eq.(5) se obtém $g(\eta) = 1$ para qualquer valor de η.