

Mecânica Quântica – Série 7 – Soluções

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2013/2014

(Versão de 6 de Novembro de 2013)

7.1 Resposta no enunciado.

7.2 Resposta no enunciado.

7.3 Resposta:

$l = 0$:

$$P_0^0(x) = 1$$

$l = 1$:

$$P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$$

$l = 2$:

$$P_2^2(x) = -3(x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^0(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_2^{-1}(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8} (1-x^2)$$

7.4 Resposta no enunciado. Pode visualizar as harmônicas esféricas com o Mathematica. Para isso precisa de carregar o package,

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`
```

Então com o comando

```
SphericalPlot3D[Abs[SphericalHarmonicY[l,m,teta,phi]],{teta,0,Pi},{phi,0,2 Pi}]
```

podem-se obter os gráficos da Fig. 1 (substituindo os valores correspondentes de l e m). Experimente para outros valores.

*7.5 Resposta:

$$\text{a) } H = \frac{L_z^2}{2I}, \quad I = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} a^2, \quad \text{b) } E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{c) } \Delta E = \frac{\hbar^2}{2} \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \frac{1}{a^2}$$

Nota: Pode causar alguma estranheza o nível mais baixo de energia ser zero (então e o princípio de incerteza de Heisenberg?) mas não devemos esquecer que a energia rotacional é só parte do problema. Há a energia translacional e a energia vibracional. Notar ainda que neste caso a função de onda não é zero, em contraste com o problema da partícula na caixa, onde o nível $n = 0$ era excluído por corresponder a uma função de onda identicamente zero e portanto não poder descrever a partícula (probabilidade nula). Aqui as funções de onda são proporcionais a $\exp(in\varphi)$ e portanto não se anulam para $n = 0$.

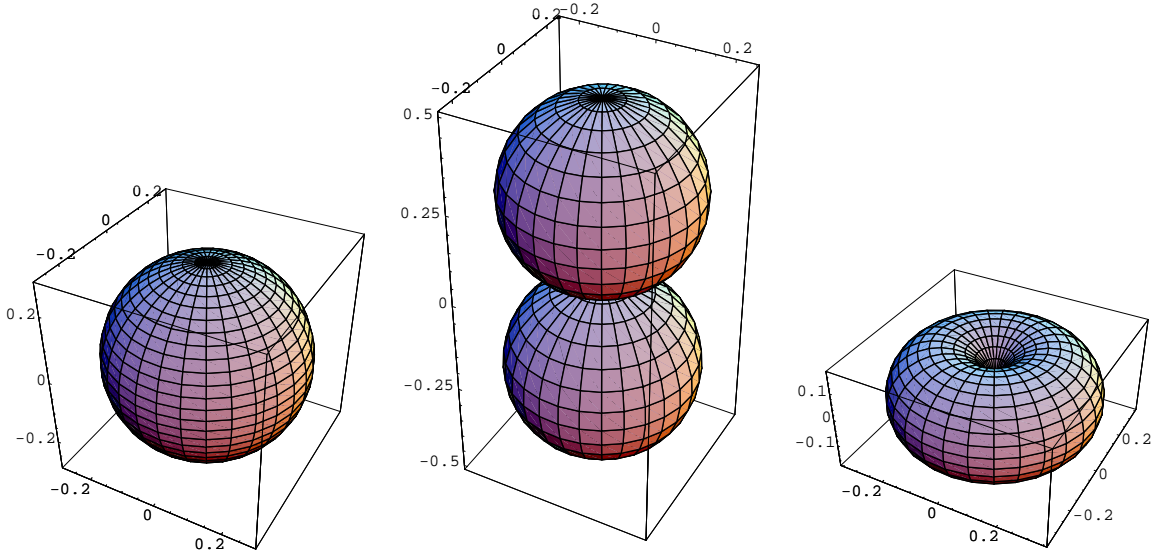


Figura 1: Gráficos de densidade para $|Y_{00}|$, $|Y_{10}|$ e $|Y_{11}|$

*7.6 Resposta:

$$a) \langle lm_1 | L_x | lm_2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)} \delta_{m_1, m_2+1} + \frac{\hbar}{2} \sqrt{(l+m_2)(l-m_2+1)} \delta_{m_1, m_2-1}$$

$$b) \langle lm_1 | L_y | lm_2 \rangle = \frac{\hbar}{2i} \sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)} \delta_{m_1, m_2+1} - \frac{\hbar}{2i} \sqrt{(l+m_2)(l-m_2+1)} \delta_{m_1, m_2-1}$$

7.7 Resposta:

$$\begin{aligned} \langle lm_1 | L_x^2 | lm_2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)} \sqrt{(l-m_2+1)(l+m_2+2)} \delta_{m_1, m_2+2} \\ &+ \frac{\hbar^2}{4} \sqrt{(l-m_2)(l-m_2+1)} \sqrt{(l+m_2-1)(l-m_2+2)} \delta_{m_1, m_2-2} \\ &+ \frac{\hbar^2}{4} (l+m_2)(l-m_2+1) \delta_{m_1, m_2} + \frac{\hbar^2}{4} (l-m_2)(l+m_2+1) \delta_{m_1, m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle lm_1 | L_y^2 | lm_2 \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4} \sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)} \sqrt{(l-m_2+1)(l+m_2+2)} \delta_{m_1, m_2+2} \\ &- \frac{\hbar^2}{4} \sqrt{(l-m_2)(l-m_2+1)} \sqrt{(l+m_2-1)(l-m_2+2)} \delta_{m_1, m_2-2} \\ &+ \frac{\hbar^2}{4} (l+m_2)(l-m_2+1) \delta_{m_1, m_2} + \frac{\hbar^2}{4} (l-m_2)(l+m_2+1) \delta_{m_1, m_2} \end{aligned}$$

Verificação:

$$\langle lm_1 | L_x^2 + L_y^2 | lm_2 \rangle = \langle lm_1 | L^2 - L_z^2 | lm_2 \rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m_2^2] \delta_{m_1, m_2}$$

*7.8 Resposta:

$$\text{b) } E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I_1} l(l+1) + \frac{I_1 - I_3}{2I_1 I_3} \hbar^2 m^2 \quad \text{c) } E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I_3}$$

7.9 Resposta no enunciado.

*7.10 Resposta:

$$P(L^2 = 0) = 0; \quad P(L^2 = 6\hbar^2) = 1;$$

$$P(m = 2) = P(m = -2) = \frac{1}{6}; \quad P(m = 0) = 0; \quad P(m = 1) = P(m = -1) = \frac{1}{3}.$$

*7.11 Resposta no enunciado.

*7.12 Resposta no enunciado.

7.13 Resposta no enunciado.