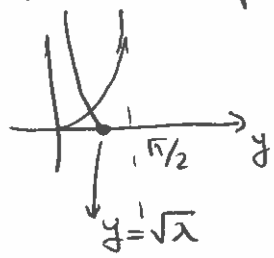
MQ, 1º TESTE 2013/2014 — 9/11/2013

I

1) Verdadeira. $C = A^2 + AB + BA + B^2 \Rightarrow C^+ = A^2 + BA + AB + B^2 = C$

2) Verdadeira. ψ_n e ψ_{n+2} têm a mesma paridade logo a função integrande é ímpar

3) Verdadeira. As soluções pares têm sempre solução se $0 < \lambda < \frac{\pi^2}{4}$



4) Falsa. pois $x^2 \propto (A + A^+)^2 = A^2 + AA^+ + A^+A + A^{+2}$

e $\langle u | AA^+ u \rangle \neq 0$ e $\langle u | A^+ A | u \rangle \neq 0$

II

1) Pelo postulado da expansão

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x) \quad \text{em} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = 1$$

Logo

$$|A|^2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $$\langle E \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 E_n = |A|^2 E_1 + \frac{1}{2} E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$\langle E \rangle$ é constante no tempo. Justificação

$$\psi(x,t) = A\, u_1(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}$$

e

$$H\,\psi(x,t) = A E_1 u_1(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 u_2(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$$

Portanto

$$\langle E\rangle_t = \langle\psi|H|\psi\rangle = \int_0^a dx\, \psi^*(x,t)\, H\, \psi(x,t)$$

$$= \int_0^a dx \left[A^* u_1(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t} \right]$$

$$\left[A E_1 u_1(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \right]$$

$$= \int_0^a dx\, |A|^2 E_1 u_1(x) u_1(x) + \int_0^a dx\, \frac{1}{2} E_2 u_2(x) u_2(x)$$

$$- \frac{A^*}{\sqrt{2}} E_2 \int_0^a dx\, u_1(x) u_2(x)\; e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t}$$

$$- \frac{A}{\sqrt{2}} E_1 \int_0^a dx\, u_1(x) u_2(x)\; e^{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t}$$

$$= |A|^2 E_1 + \frac{1}{2} E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) = \langle E\rangle_{t=0}$$

onde se usou

$$\int_0^a dx\, u_n(x)\, u_m(x) = \delta_{nm}$$

3) $$P(0 \le x \le a/2) = \int_0^{a/2} dx\, |\psi(x,0)|^2$$

$$= \underbrace{|A|^2}_{=1/2} \int_0^{a/2} dx\, u_1^2(x) + \frac{1}{2} \int_0^{a/2} dx\, u_2^2(x) - \frac{2A}{\sqrt{2}} \int_0^{a/2} dx\, u_1(x) u_2(x)$$

fazendo $y = \frac{\pi x}{a}$; $y' = \frac{2\pi x}{a}$ $\Rightarrow$ $dx = \frac{a}{\pi} dy$; $dx = \frac{a}{2\pi} dy'$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin y \; ; \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin 2y = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin y'$$

Então

$$P(0 \leq x \leq a/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)\left(\frac{2}{a}\right)\int_0^{\pi/2} dy \sin^2 y + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\pi}\right)\left(\frac{2}{a}\right)\int_0^{\pi} dy' \sin^2 y'$$

$$- \sqrt{2}A\left(\frac{a}{\pi}\right)\left(\frac{2}{a}\right)\int_0^{\pi/2} dy \sin y \sin 2y$$

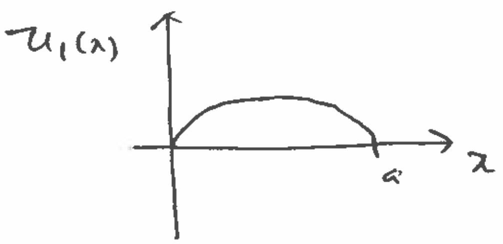
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}\sin 2y'\right]_0^{\pi}$$

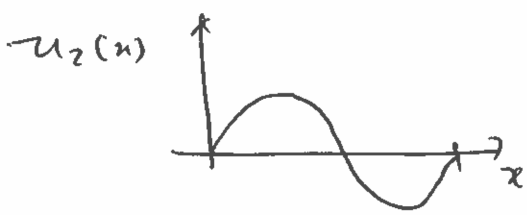
$$- \frac{2\sqrt{2}A}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{6}\sin 3y\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{2}A}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{2}A}{3\pi}$$

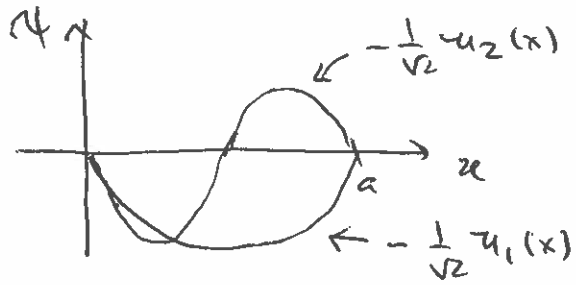
$P(0 \leq x \leq a/2) > 1/2 \Rightarrow A < 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Método Gráfico





logo se $A<0$



e a probabilidade é maior para $0 \leq x \leq a/2$

4) Tomemos $E<0$. Logo a Equação de Schrödinger será

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

para $0<x<a$, e deve obedecer às condições na fronteira

$$u(0) = u(a) = 0.$$

As soluções são da forma

$$u(x) = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x$$

A condição em $x=0$

$$u(0) = 0 = B \Rightarrow \boxed{B=0}$$

A condição em $x=a$

$$u(a) = 0 = A \sinh \alpha a \Rightarrow \boxed{A=0}$$

Portanto concluímos que $A=B=0$ e não há solução.

1) $E = -|E|$; $\alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

Na região II e III a equação de Schrödinger é, para $E<0$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0$$

Logo

$$\begin{cases} u_I(x) = 0 & \text{(Potencial infinito)} \\ u_{II}(x) = A \sinh(\alpha(x+a)) & \text{para que } u_{II}(-a) = 0 \\ u_{III}(x) = B e^{-\alpha x} & \text{para que } u_{III} \to 0 \text{ quando } x \to +\infty \end{cases}$$

Temos de assegurar a continuidade da função em $x=0$ e a discontinuidade da derivada (função delta). Portanto obtemos

$$\begin{cases} A \sinh(\alpha a) = B \\ -\alpha B - A\alpha \cosh(\alpha a) = -\frac{\lambda'}{a} u(0) = -\frac{\lambda'}{a} A \sinh(\alpha a) \end{cases}$$

ou

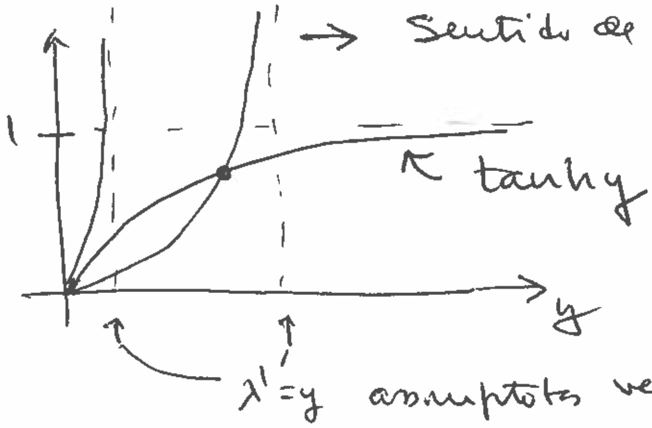
$$-\alpha A \sinh(\alpha a) - A\alpha \cosh(\alpha a) = -\frac{\lambda'}{a} A \sinh(\alpha a)$$

$$\sinh(\alpha a)(\lambda' - \alpha a) = \alpha a \cosh(\alpha a)$$

Fazendo $y = \alpha a = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}\, a$ obtemos

$$\boxed{\tanh y = \frac{y}{\lambda' - y}}$$

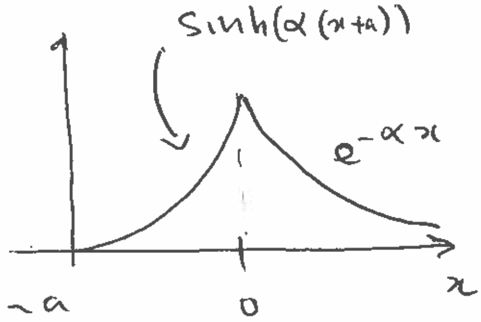
2) Para encontrar os estados ligados fazemos os gráficos.



Para ter uma intersecção é preciso um valor mínimo de λ' (intensidade da função delta). Pode-se calcular (não era preciso no teste). A condição é

$$\left(\frac{y}{\lambda'-y}\right)'\Bigg|_{y=0} < (\tanh y)'\Big|_{y=0} \Rightarrow \lambda' > 1$$

3)



4) Se $E>0$ temos $\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0$ com $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\begin{cases} u_{I}(x) = 0 \\ u_{II}(x) = A\sin(k(x+a)) & \text{para } u_{II}(-a)=0 \\ u_{III}(x) = e^{-ikx} + R\,e^{ikx} \end{cases}$$

As condições são agora

$$\begin{cases} A \sin ka = 1+R \\ -ik + ikR - Ak\cos ka = -\frac{\lambda'}{a} A \sin ka \end{cases}$$

Substituindo A obtemos

$$-ik + ikR - k\cot(ka)(1+R) = -\frac{\lambda'}{a}(1+R)$$

e

$$R(\lambda' - ka\cot(ka) + ika) = -\lambda' + ka\cot(ka) + ika$$

ou seja

$$R = \frac{-\lambda' + ka\cot(ka) + ika}{\lambda' - ka\cot(ka) + ika} \Rightarrow |R|^2 = 1$$

5) fluxo:

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[u^* \frac{du}{dx} - u\frac{du^*}{dx}\right]$$

Portanto

$j_I(x) = 0$ (a função é zero)

$j_{II}(x) = 0$ (a função é Real $u_{II}(x) = A\sin k(x+a)$)

$$j_{III}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[\left(e^{ikx} + R^* e^{-ikx}\right) ik\left(-e^{-ikx} + Re^{ikx}\right) - \text{c. conjugado}\right]$$

logo

$$j_{III}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[ik\left(-1 + R e^{2ikx} - R^* e^{-2ikx} + |R|^2\right) - c.c \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[-ik + ikRe^{2ikx} - ikR^* e^{-2ikx} + |R|^2 ik - \left(+ik - ikR^* e^{-2ikx} + ikR e^{2ikx} - ik|R|^2\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[-2ik + 2ik|R|^2 \right]$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\left[-1 + |R|^2 \right]$$

fluxo para a esquerda   fluxo para a direita

e como $|R|^2 = 1$ obtemos

$$j_I(x) = j_{II}(x) = j_{III}(x) = 0$$

o fluxo é conservado. Como não pode ser transmitido para a região $x < -a$, todo o fluxo que incide é reflectido.