Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2014-15

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

2° Exame: 31 de Janeiro de 2015 – 11h30

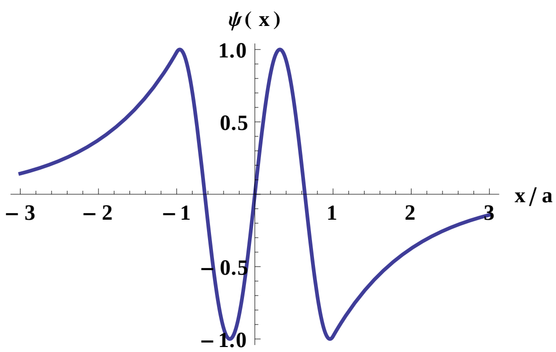
Duração do Exame: 3h00

Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se A for um operador hermítico então o operador $B = e^{iA}$ também é um operador hermítico.
2. Considere uma partícula numa caixa de largura a centrada em $x = 0$ ($V = 0, |x| < a/2$, $V = \infty, |x| > a/2$). É adicionado um potencial de função delta na forma $V_\delta = V_0 a\delta(x)$ com $V_0 > 0$. Então o primeiro estado excitado tem a energia $E_1 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + V_0$.
3. Considere a função de onda representada na figura



   Esta função de onda corresponde ao problema do poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ |x| > a$. Sabendo que este estado é ímpar e que é o estado ligado de energia mais alta (menor valor de $|E|$) então existem quatro estados ligados neste potencial.

4. Considere num oscilador harmónico a uma dimensão o estado $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

   onde $|n\rangle$ são os estados próprios de energia do oscilador. Então tem-se $\langle\psi|x|\psi\rangle = 0$.

5. Considere os estados do átomo de Hidrogénio $|\psi_{nlm}\rangle$. Então

$$\langle\psi_{320}|z|\psi_{100}\rangle = \beta\, a_0$$

   onde a_0 é o raio de Bohr e $\beta \neq 0$.

6. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ com $j_1 = \frac{3}{2}$ e $j_2 = \frac{1}{2}$. Então o estado com $j = 1, m_j = -1$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,

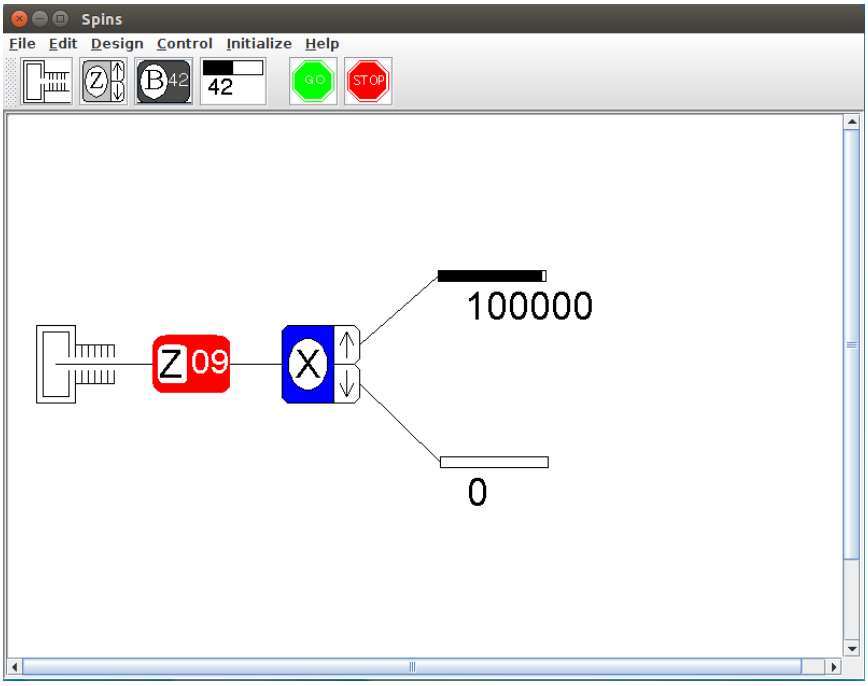
$$|1,-1\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

7. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r)\left(|1,1\rangle + |2,1\rangle - 2\,|3,0\rangle\right)$$

onde $|l,m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. A probabilidade duma medida de L_z dar $\hbar$ é $1/3$.

8. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 100000 eletrões num dado estado e após terem passado por um campo magnético $\vec{B} = B\vec{e}_z$, que atuou um tempo T tal que $2\omega_0 T = \frac{\pi}{2}$ e por um analisador de spin segundo o eixo dos x. A frequência de precessão do spin num campo magnético é $2\omega_0$ onde $\omega_0 = \frac{eB}{2m}$. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal.

II (4 valores)

Seja um eletrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x,0) = A\left[u_1(x) - u_2(x)\right]$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, correspondente à energia $E_n = (\pi^2\hbar^2 n^2)/(2ma^2)$, para $n = 1, 2, \ldots$ e A é uma constante real e positiva.

1. Determine a constante A. Qual é a probabilidade de numa medição obter a energia E_3?
2. Calcule o valor médio da energia da partícula neste estado.
3. Calcule o valor médio de x no estado $\Psi(x,0)$, $\langle x\rangle$.
4. Escreva a expressão para $\Psi(x,t)$. Para o instante de tempo $t = T \equiv \frac{4ma^2}{\pi\hbar}$ determine a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $0 < x < \frac{a}{2}$.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\beta}{a}\,\delta(x) + \begin{cases} \infty & |x| > \frac{a}{2} \\ 0 & |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

onde a constante $\beta > 0$, é adimensional.

1. Explique porque pode separar o problema em soluções pares e ímpares.
2. Considere $E < 0$. Encontre a condição a que deve obedecer β para haver estado(s) ligado(s) nesta situação.
3. Considere agora $E > 0$. Mostre que a condição para haver soluções pares é

   $$\tan\frac{y}{2} = \frac{2y}{\beta}$$

   onde, como habitualmente, $y = ka$, e $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. A equação acima tem sempre soluções? Comente este resultado, e compare com o que obteve na alínea 2.
4. Mostre que a condição para haver soluções ímpares é

   $$y = 2n\pi$$

   Comente este resultado.
5. Faça um gráfico do estado fundamental para $E < 0$ e $E > 0$. Qual a condição para $E = 0$? Qual é o gráfico nesse caso?
6. Mostre que o 1º estado excitado é ímpar, isto é, que a energia do primeiro estado ímpar, E_1^-, é sempre tal que $E_1^- > E_1^+$ onde E_1^+ é a energia do 1º estado par (estado fundamental).

IV (2 valores)

A função de onda duma partícula num potencial central é dada por

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\theta + \cos\theta\right)g(r)$$

onde

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

1. Quais são os os resultados possíveis duma medida de L_z para este estado?
2. Qual é a probabilidade de que uma medida dê o valor $L^2 = 2\hbar^2$? Determine as probabilidades de obter $L_z = 0, \pm\hbar$.
3. Qual é o valor médio de L_z?

V (3 valores)

Considere uma partícula de **spin 1** com o seguinte Hamiltoniano não perturbado

$$H_0 = \frac{A}{\hbar^2} S_z^2 \,,$$

com a cosntante $A > 0$. Considere a base onde S^2 e S_z são diagonais, isto é, os vectores próprios $|1, m\rangle$ com

$$S^2 \,|1, m\rangle = 2\hbar^2 \,|1, m\rangle \,, \quad S_z \,|1, m\rangle = \hbar m \,|1, m\rangle$$

1. Mostre que, nesta base, o Hamiltoniano de pode escrever na forma matricial

$$H_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

   Determine os valores próprios e faça um esquema dos níveis de energia.

2. Considere agora que o sistema fica sujeito à perturbação

$$H_1 = \frac{B}{\hbar^2} \left(S_x^2 - S_y^2 \right)$$

   onde $B > 0$ mas $B \ll A$. Determine as correcções de 1ª ordem ao estado fundamental.

3. Determine as correcções de 1ª ordem ao primeiro estado excitado. **Nota:** Este estado é degenerado.
4. Faça um desenho dos níveis de energia (valores próprios de H) com $B = 0$ e com $B \neq 0$.
5. Que aconteceria se resolvesse o problema exatamente? Comente este resultado.

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. Um campo magnético $\vec{B} = B_0 \,\vec{e}_z$ é aplicado segundo o eixo dos z. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} = \hbar\omega_0 \,\sigma_z$$

onde $\omega_0 = \dfrac{eB_0}{2m}$. No instante $t = 0$, o sistema está no estado com spin $+\hbar/2$ segundo o eixo dos y, isto é,

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow, S_y\rangle$$

1. Qual a probabilidade de uma medida do spin segundo o eixo dos x dar o valor $+\hbar/2$ para o estado $|\psi(0)\rangle$?
2. Determine o estado do sistema no instante t, $|\psi(t)\rangle$.
3. Determine a probabilidade $P(\uparrow, S_x)$ de uma medida do spin segundo o eixo dos x dar $+\hbar/2$, em função do tempo.
4. Determine o tempo mínimo, T, ao fim do qual $P(\uparrow, S_x) = 1$. Comente o resultado.