

# Mecânica Quântica – Série 10 – Soluções

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2014/2015

(Versão de 26 de Novembro de 2014)

\* 10.1

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad \psi^- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\cos \frac{\alpha}{2} e^{i\beta} \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{M}\psi^+ = \frac{\hbar}{2}\psi^+ \quad \mathcal{M}\psi^- = -\frac{\hbar}{2}\psi^- .$$

\* 10.2 Resposta:

$$P(-\hbar/2) = \frac{13}{50} = 26\% .$$

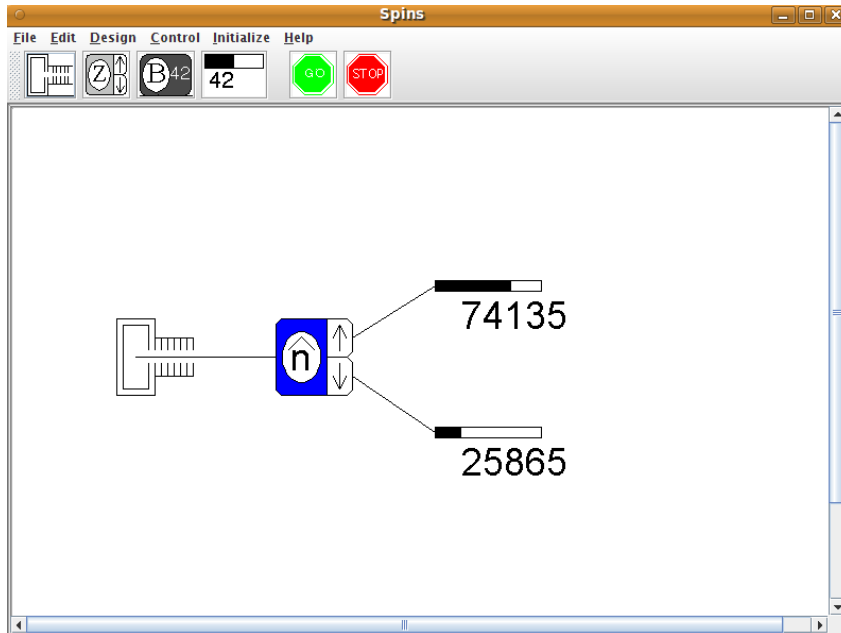


Figura 1: Montagem para resolver o problema 10.2. O feixe inicial está no estado dado no problema e a direcção  $\hat{n} = 3/4\vec{e}_x + 4/5\vec{e}_y$ . Para o programa isto corresponde aos ângulos de  $\theta = 90^\circ$  e  $\phi = 53.13^\circ$ .

\* 10.3 Resposta:

$$P(-\hbar/2) = \frac{1}{2} .$$

10.4 Resposta no enunciado.

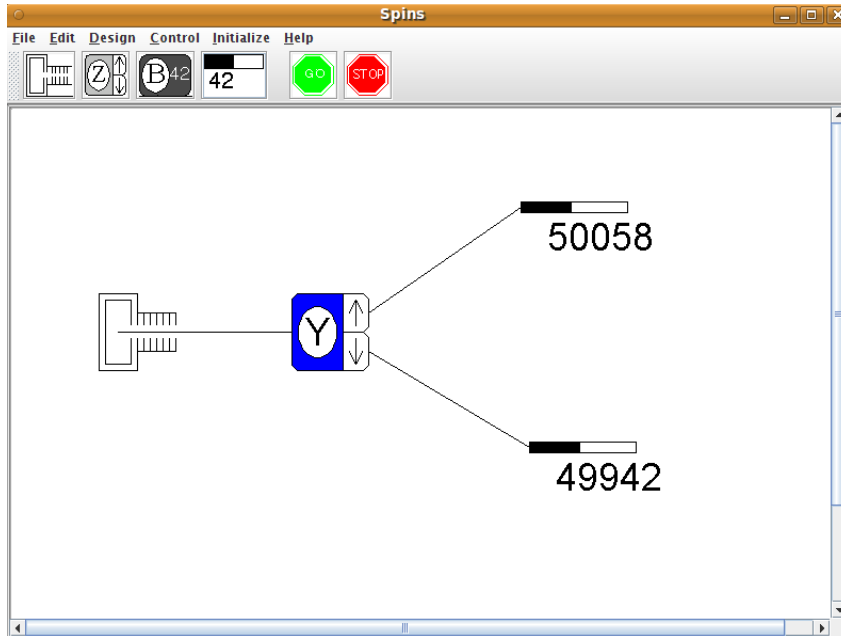


Figura 2: Montagem para resolver o problema 10.3. O feixe inicial está no estado dado no problema.

\*10.5 Resposta:

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = 2T) = \cos^4 \omega T + \sin^4 \omega T$$

$$P(S_x = -\frac{\hbar}{2}, t = 2T) = 2 \cos^2 \omega T \sin^2 \omega T$$

$$\omega = \frac{egB}{4m_e}$$

Nota: Este problema pode resolver-se de (pelo menos) duas maneiras:

1º Método

Aqui usa-se a representação usual em que  $S_z$  é diagonal. Os passos são:

1. Escrever o estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  nesta representação. Usar os resultados do problema 10.1.
2. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo  $0 < t < T$ .
3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo  $T < t < 2T$ .
4. Escrever o estado final,  $|\psi(2T)\rangle$  como combinação linear dos estados próprios de  $S_x$ , isto é,

$$|\psi(2T)\rangle = a |S_x = \hbar/2\rangle + b |S_x = -\hbar/2\rangle$$

usando novamente o problema 10.1.

5. O resultado pretendido é  $|a|^2$ .

## 2º Método

Aqui usa-se a representação em que  $S_x$  é diagonal. Os passos são:

1. Mostrar que as matrizes do spin nesta representação são

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. O estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  nesta representação é muito simples

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo  $0 < t < T$ . Não esquecer de usar as matrizes apropriadas a esta representação.
4. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo  $T < t < 2T$ .
5. O estado final,

$$|\psi(2T)\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

já está na representação em que  $S_x$  é diagonal. Portanto o resultado pretendido é simplesmente  $|c|^2$ . Para compreender os resultados é útil representar graficamente as duas probabilidades, o que é feito na figura seguinte,

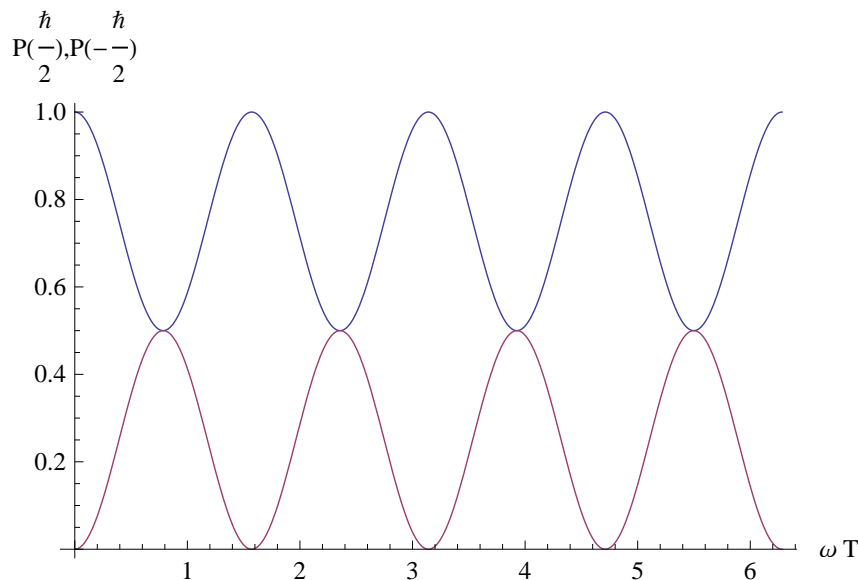
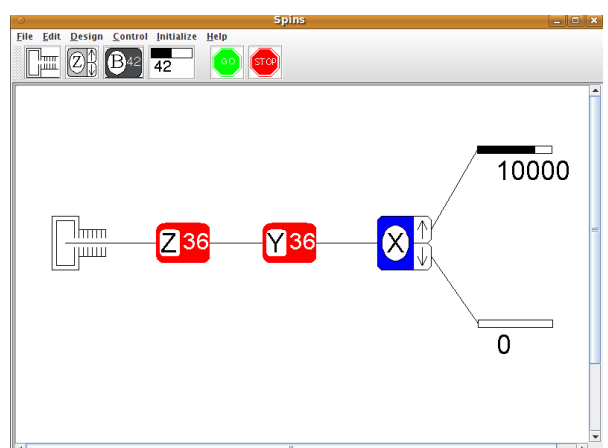
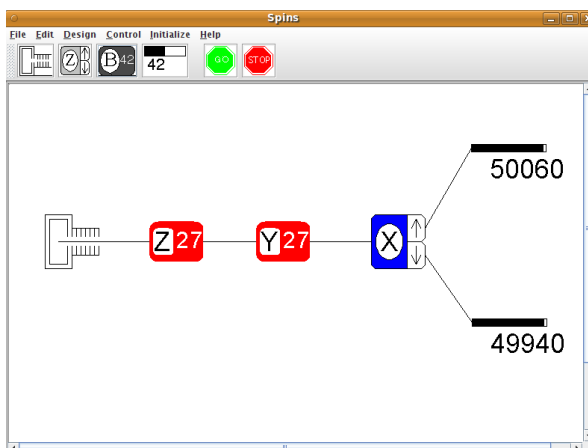
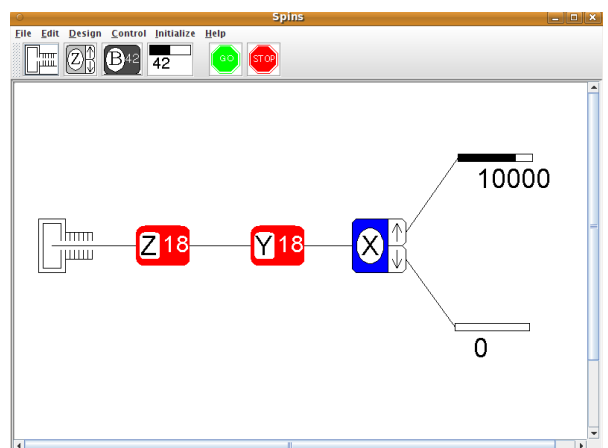
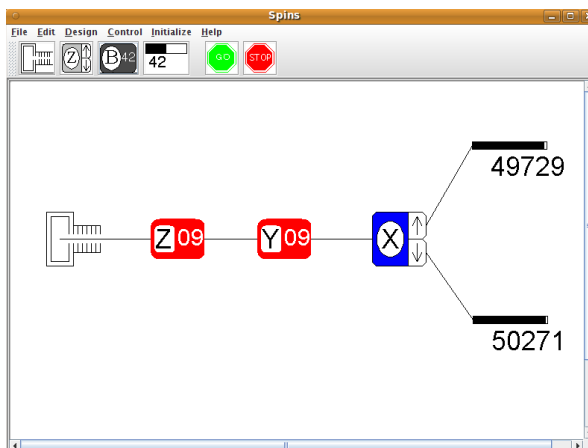
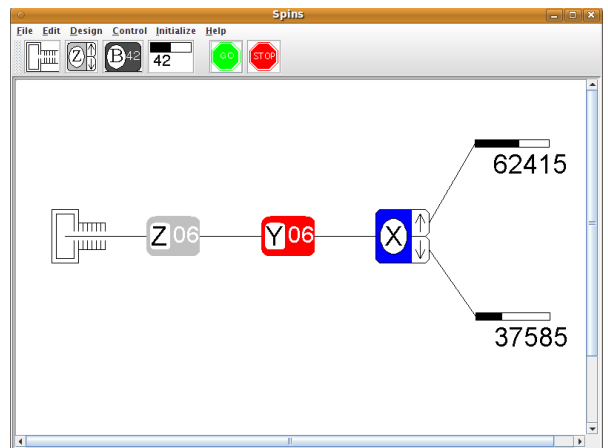
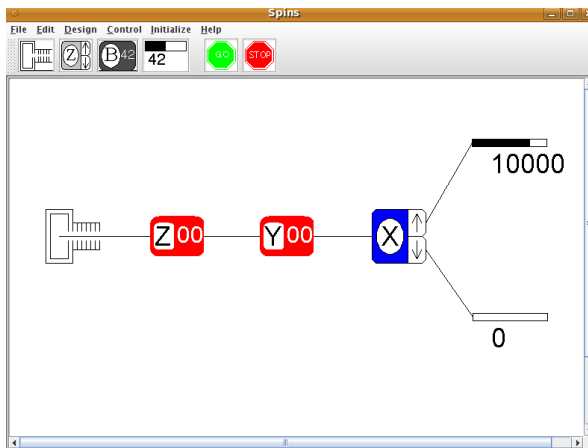


Figura 3:  $P(S_x = \pm \frac{\hbar}{2})$ .

Os resultados do programa `spins` estão na figuras juntas.



10.6 Resposta no enunciado.

\*10.7 Resposta no enunciado.

\*10.8 Resposta:

$$\begin{array}{ll}
\text{Singleto} & |0,0\rangle : V(r) = V_1(r) - 3V_3(r) \\
& |1,1\rangle : V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r) \\
\text{Tripleto} & |1,0\rangle : V(r) = V_1(r) - 4V_2(r) + V_3(r) \\
& |1,-1\rangle : V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r)
\end{array}$$

**\*10.9 Resposta:**

a) 0, b) 50%

$$\begin{aligned}
c) \quad P_T &= \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} [\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \\
&\quad + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)]^2
\end{aligned}$$

Nota: Para a alínea c) a probabilidade dos dois electrões estarem num estado singleto é

$$P_S = \frac{1}{2} [\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)]^2.$$

Pode verificar que  $P_T + P_S = 1$ .

**\*10.10 Resposta:**

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) + L V_2(r) + L^2 V_3(r) & (J = L + 1) \\ V_1(r) - V_2(r) + V_3(r) & (J = L) \\ V_1(r) - (L + 1) V_2(r) + (L + 1)^2 V_3(r) & (J = L - 1) \end{cases}$$

**10.11 Resposta no enunciado.**

**\*10.12 Respostas:**

1. As componentes do estado estão sempre definidas a menos duma fase global pois só sabemos as probabilidades. Um estado possível é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Se escrevermos, numa notação óbvia,

$$|\psi\rangle = |\downarrow; x\rangle = \alpha |\uparrow; \vec{n}\rangle + \beta |\downarrow; \vec{n}\rangle$$

onde na representação onde  $S_z$  é diagonal temos

$$|\downarrow; x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow; \vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |\downarrow; \vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right),$$

e portanto

$$2|\beta|^2 - 1 = \sin \theta \cos \varphi$$

Da figura obtemos

$$2|\beta|^2 - 1 = 2 \frac{85441}{100000} - 1 = 0.7088 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e portanto podemos ter  $\theta = \pi/2, \varphi = \pi/4$  ou  $\theta = \pi/4, \varphi = 0$ , entre muitas outras possibilidades.

**\*10.13** Resposta:  $\theta = \pi/2, \varphi = 7\pi/6$ .

**\*10.14** Notando que o spin precessa com frequência  $2\omega_0$ , temos a situação descrita na figura seguinte

