TÉCNICO LISBOA

Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2014-15

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

1° Teste: 8 de Novembro de 2014 – 9h30

Duraçao do teste: 1h30

I (4 valores)

Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se A e B forem operadores hermíticos, então o operador $C = ABA$ também é hermítico.
2. As funções próprias do operador Hamiltoniano para o problema da partícula na caixa simétrica ($V = 0$, para $|x| < \frac{a}{2}$, e $V = \infty$ para $|x| > \frac{a}{2}$), são funções próprias simultâneas dos operadores Hamiltoniano e momento linear.
3. Considere um poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ x > |a|$. Se tivermos $\lambda = 10$, onde $\lambda = 2mV_0\, a^2/\hbar^2$, então existem quatro estados ligados para este potencial.
4. Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico, a uma dimensão, temos sempre
$$\langle n|p^2|n+4\rangle = 0.$$

II (8 valores)

Seja um eletrão no poço de potencial infinito simétrico de largura a, isto é, $V = 0$ para $|x| < \dfrac{a}{2}$ e $V = \infty$ para $|x| > \dfrac{a}{2}$.

(**Nota:** Nalgumas das questões, se pensar bem, não precisa de fazer muitas contas).

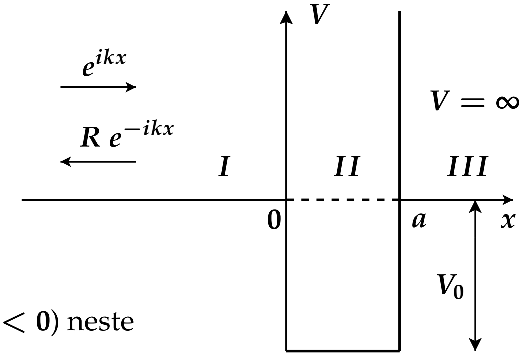
1. Suponha que o eletrão no instante $t = 0$ se encontra no estado
$$\psi(x,0) = Au_1^-(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}u_2^-(x).$$
onde $u_n^{\pm}(x)$ são as funções próprias do operador Hamiltoniano corretamente normalizadas (ver formulário no final) e A é uma constante real e positiva. Determine A.
2. Calcule o valor médio da energia $\langle E\rangle$ no estado $\psi(x,0)$. Que acontece a $\langle E\rangle$ quando $t > 0$? Justifique a resposta.
3. Escreva o estado $\psi(x,t)$. Qual o tempo mínimo, T, ao fim do qual $|\psi(x,0)|^2 = |\psi(x,T)|^2$?
4. Para $t = 0$, calcule o valor médio de $\langle x\rangle$ no estado $\psi(x,0)$. Que acontece a $\langle x\rangle$ quando $t > 0$? Justifique a resposta.

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.



1. **[2 val]** Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial é

$$\cot y = -\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$

onde, como habitualmente, $y = qa = \sqrt{\lambda - (\alpha a)^2}$, $\lambda = 2mV_0a^2/\hbar^2$ e $\alpha = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$.

2. **[1 val]** Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?

3. **[1 val]** Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{49\hbar^2}{2ma^2}$?

4. **[1 val]** Nas condições da alínea anterior, esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o último estado ligado (o de maior energia).

5. **[3 val]** Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < 0$ a função de onda é dada por

$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

Calcule R e mostre que $|R| = 1$. Calcule R no limite $V_0 \to 0$. Explique o resultado que obteve.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
$V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
$V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$u_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ (2n)^2$$

$$u_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\ \frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ (2n-1)^2$$

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**

As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, H_n(y)\, e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(A^+A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

As relações inversas são

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A + A^+\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(A - A^+\right)$$

Os estados corretamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n|0\rangle$$

com $A|0\rangle = 0$ e

$$A|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad A^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$