



2º Teste/1º Exame: 18 Janeiro de 2016 – 15h00

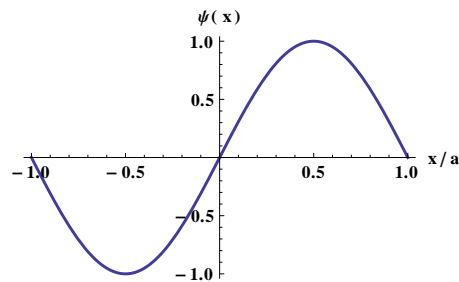
Duração do Teste: 1h30; Duração do Exame: 3h00

1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

- O operador $A = xp_y - yp_x$ é hermitico.
- Considere os potenciais, $V_1(x) = \infty$, if $|x| > a$, $V_1(x) = -V_0$, if $|x| < a$ e $V_2(x) = 0$, if $|x| > a$, $V_2(x) = -V_0$, if $|x| < a$. Então a energia do estado fundamental do potencial V_1 é menor do que a do potencial V_2 .
- Considere a função de onda representada na figura



Sabe-se que esta função representa a função de onda dum estado estacionário duma *partícula na caixa* (poço de potencial infinito) entre $-a < x < a$, com um potencial adicional $V(x) = \beta\delta(x)$ com $\beta > 0$. Então a energia deste estado é $E = \hbar^2\pi^2/(2ma^2)$.

- Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico temos sempre $\langle n+2 | AA^\dagger | n+2 \rangle = n+2$.

II (4 valores)

Seja um eletrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x, 0) = A [u_1(x) - 2u_2(x)]$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, correspondente à energia $E_n = (\pi^2\hbar^2n^2)/(2ma^2)$, para $n = 1, 2, \dots$ e A é uma constante real e positiva.

1. Determine a constante A . Qual é a probabilidade de numa medição obter a energia E_2 ?
2. Calcule o valor médio da energia da partícula neste estado.
3. Calcule o valor médio de x no estado $\Psi(x, 0)$, $\langle x \rangle$.
4. Escreva a expressão para $\Psi(x, t)$. Qual o período de oscilação da probabilidade, isto é o intervalo de tempo mínimo tal que $|\Psi(x, T)|^2 = |\Psi(x, 0)|^2$.

III (4 valores)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < 2a \\ V_1 & x > 2a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$. Para as alíneas 1) a 4) considere que $V_1 = 0$.

1. Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial se escreve

$$\tan 2y = \frac{2y\sqrt{\lambda - y^2}}{2y^2 - \lambda}$$

onde, como habitualmente, $y = qa = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$ e $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$.

2. Existem sempre estados ligados neste potencial? Justifique cuidadosamente a resposta.
3. Quantos estados ligados existem para $V_0 = \frac{2\hbar^2}{ma^2}$?
4. Mostre que quando $\lambda \gg 1$ a energia do estado fundamental é aproximadamente dada por

$$E_1 \simeq -V_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}.$$

Comente o resultado.

5. Considere agora que $V_1 = \infty$. Resolva o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < 0$ a função de onda é dada por

$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

onde $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Mostre que $R = e^{i\delta}$. Determine δ em função dos parâmetros do problema. Calcule R no limite em que $V_0 \rightarrow 0$. Podia ter encontrado este valor sem fazer os cálculos anteriores?

IV (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r) \left(\frac{1}{\sqrt{6}} |1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |1, -1\rangle \right)$$

onde os estados $|l, m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z . Faz-se uma medida de L_z e obtém-se \hbar . A probabilidade duma medida de L_z , feita imediatamente a seguir à medida anterior, de dar \hbar é $1/6$.

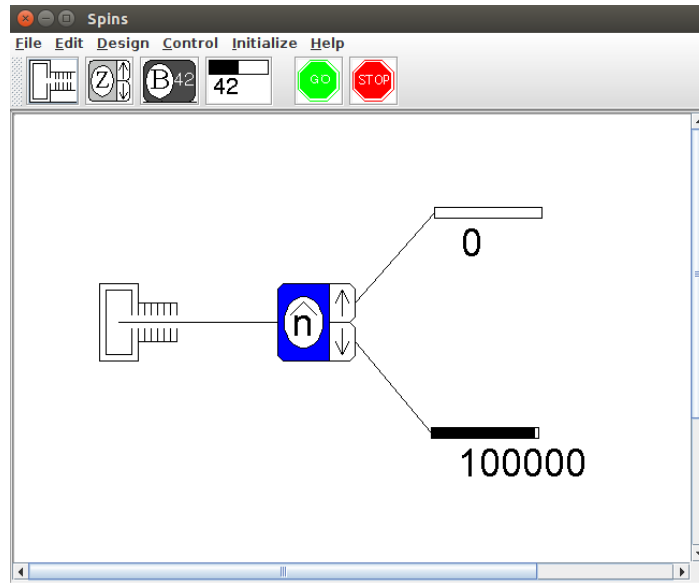
2. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ onde $J_1^2 = 6\hbar^2$ e $J_2^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$. Então o estado do spin total \vec{J} , com $j = \frac{3}{2}$, $m_j = -\frac{1}{2}$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} |2, 0\rangle |1/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}} |2, -1\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

3. Os resultados da medida do spin do eletrão na direção definida pelos ângulos θ e $\phi = 0$ são

$$\frac{\hbar}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

4. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de elétrons detetados depois de terem sido *disparados* 100000 elétrons no estado $|\psi\rangle$ e após terem passado por um analisador de spin segundo a direção \vec{n} . Sabendo que o estado inicial é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal, então a direção \vec{n} corresponde aos ângulos $\theta = 120^\circ$, $\phi = 180^\circ$.

V (2 valores)

As vibrações da molécula de amónia podem ser descritas pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{L_x^2}{2I_1} + \frac{L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3}$$

onde I_1 é o momento de inércia segundo x e y e I_3 segundo z . Considere que $I_1 = \frac{\hbar}{4\omega}$ e $I_3 = 2I_1$ onde ω é uma constante com as dimensões duma frequência angular.

1. Mostre que H e L_z comutam. Determine os valores próprios e funções próprias de H .
2. Suponha que no instante $t = 0$ o sistema se encontra no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle$$

onde $|l, m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z . Determine o estado no instante t .

VI (3 valores)

Considere o eletrão sujeito ao potencial de Coulomb do átomo de hidrogénio. Aplica-se ao sistema uma perturbação que pode ser descrita pelo Hamiltoniano

$$H_1 = g(r) x$$

onde $g(r)$ é tal que

$$\begin{aligned} \int dr r^3 R_{10}(r) R_{10}(r) g(r) &= \sqrt{6} A, \\ \int dr r^3 R_{20}(r) R_{21}(r) g(r) &= \sqrt{6} B, \\ \int dr r^3 R_{21}(r) R_{21}(r) g(r) &= \sqrt{6} C. \end{aligned}$$

e $R_{nl}(r)$ são as funções radiais do átomo de hidrogénio. A, B, C são constantes reais e $B > 0$. Despreze a estrutura fina e hiperfina face a esta perturbação.

1. Quais são as dimensões físicas das constantes A, B, C ?
2. Determine a correção de primeira ordem para o estado fundamental, $n = 1$.
3. Considere agora correção de primeira ordem ao primeiro estado excitado, $n = 2$. Mostre que na base

$$|2, 1, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle, |2, 0, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle$$

o Hamiltoniano da perturbação se escreve

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & Y \\ 0 & 0 & Y & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine X, Y em função de A, B, C .

4. Determine as correções aos níveis $n = 2$ e faça um esquema das energias antes e depois da perturbação ser aplicada. Escreva o estado próprio com energia mais elevada na base dada na alínea anterior.

VII (3 valores)

O positrónio consiste dum eletrão e dum positrão ligados como o eletrão e o protão no átomo de Hidrogénio. O Hamiltoniano da interação dos spins pode-se escrever na forma

$$H_0 = 2 \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$$

onde A é uma constante e \vec{S}_e e \vec{S}_p são os operadores de spin do eletrão e positrão, respetivamente.

1. Definimos o spin total $\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_p$. Quais são os valores possíveis para S^2 e S_z ? Quais são os estados próprios?
2. Calcule os valores próprios do Hamiltoniano H_0 para cada um dos estados referidos na alínea anterior.
3. Aplicamos um campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ paralelo ao eixo dos z . O Hamiltoniano é então dado por

$$H = H_0 + \frac{\mu_B B_0}{\hbar} (S_{z,e} - S_{z,p})$$

onde $\mu_B = e\hbar/2m_e$ é o magnetão de Bohr. Encontre os valores próprios exatos do Hamiltoniano H .