Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

2º Exame: 1 de Fevereiro de 2016 – 15h00

Duração do Exame: 3h00

Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

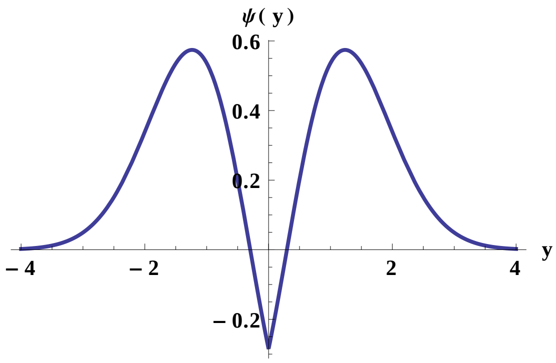
1. Sabe-se que para os operadores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ se tem: $A\,|\psi_n\rangle = a_n\,|\psi_n\rangle$ e $B\,|\phi_n\rangle = b_n\,|\phi_n\rangle$. Sabe-se ainda que

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\,|\phi_1\rangle + 3\,|\phi_2\rangle\right), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\,|\phi_1\rangle - 2\,|\phi_2\rangle\right)$$

   Faz-se uma medida de A e obtém-se o valor a_1. Então uma medida de B, feita imediatamente a seguir, dá o valor b_2 com probabilidade $9/13$.

2. A incerteza no momento linear de uma partícula no potencial de uma "caixa" unidimensional de largura a que se encontre num estado estacionário é nula, pois a energia está bem definida.

3. Considere um oscilador harmónico a uma dimensão ao qual de juntou uma função delta na origem, isto é, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \beta\delta(x)$. Sabe-se que a função de onda representada na figura



   corresponde ao estado fundamental neste potencial com $y = \sqrt{m\omega/\hbar}\;x$. Então $\beta < 0$.

4. Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico temos sempre $\langle n|\,A^2\,|n+2\rangle = 0$.

5. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$\psi(r,\theta,\varphi) = Ae^{-r^2/r_0^2}\;\sin^2\theta\cos 2\varphi$$

   A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = 0$ é 0.

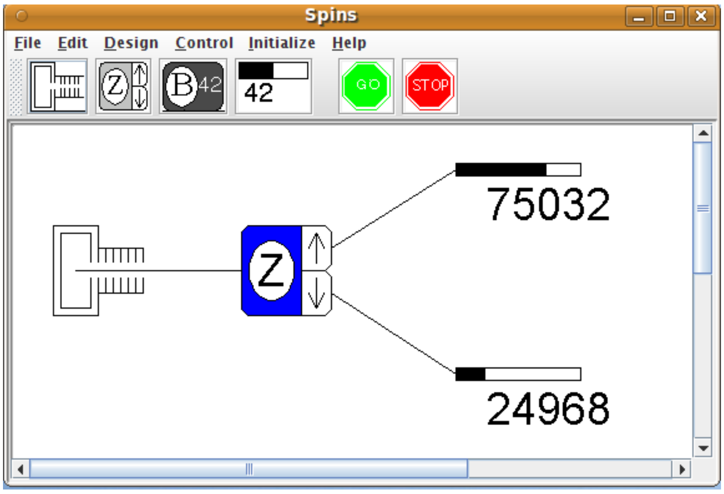
6. Para a harmónica esférica Y_{20} verifica-se que,

$$\int d\Omega\, Y_{20}\cos^2\theta = \sqrt{\frac{16\pi}{45}}\,.$$

7. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ onde $J_1^2 = 2\hbar^2$ e $J_2^2 = 2\hbar^2$. Então o estado do spin total $\vec{J}$, com $j = 1, m_j = 0$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,

$$|1,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\,|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\,|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,-1\rangle\,|1,1\rangle$$

8. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 100000 eletrões num dado estado e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos z. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal.

II (4 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que o electrão se encontra no estado

$$\psi(x,0) = Au_1(x) + Bu_2(x)$$

onde A e B são constantes reais. Sabe-se que B é positiva. Determine B em função de A.

2. Qual o valor médio da energia no estado $\psi(x,0)$ em função de A?

3. Para o estado $\psi(x,0)$, determine A e B tais que numa medida da posição a probabilidade encontrar o electrão entre 0 e $a/2$ seja mínima.

4. Escreva a função de onda para $\psi(x,t)$. Qual o valor médio da energia para $t = \dfrac{ma^2}{\hbar}$? Escreva a resposta em função de A.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\beta}{a}\,\delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -a \\ -V_0 & x > -a \end{cases}$$

onde a constante $\beta > 0$, é adimensional.

1. Mostre que a equação para os estados ligados, $E < -V_0$, neste potencial é

$$\tanh y = \frac{y}{\beta - y}$$

onde, $y = \alpha a$, com $\alpha = \sqrt{2m(|E| - V_0)/\hbar^2}$.

2. Discuta em que condições é que há estado(s) ligado(s) neste potencial. (**Sugestão:** Faça um gráfico da condição para haver estados ligados). Quantos estados ligados há para $\beta = 2$?

3. Faça o gráfico aproximado da função de onda do estado fundamental neste potencial.

4. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > -V_0$ e que para $x > 0$ a função de onda é dada por

$$u_{II}(x) = e^{-iqx} + Re^{iqx}$$

com $q = \sqrt{2m(V_0 + E)/\hbar^2}$. Calcule R. Mostre que $R = e^{i\,\delta}$. Calcule R no limite $\beta \to \infty$ e comente o resultado.

IV (2 valores)

A função de onda duma partícula num potencial central é dada por

$$\psi(\vec{r}) = C\,\frac{x}{r} e^{-\frac{r}{2a}}$$

onde a constante a tem as dimensões dum comprimento.

1. Determine a constante de normalização, C.

2. Qual é a probabilidade de que uma medida dê o valor $L^2 = \hbar^2$? Determine as probabilidades de obter $L_z = 0, \pm\hbar$.

V (3 valores)

Considere um sistema com um Hamiltoniano H_0 que na base $|1\rangle$ e $|2\rangle$ tem a seguinte representação matricial

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}$$

com $E > 0$.

1. Determine os valores próprios e os estados próprios do Hamiltoniamo não perturbado, H_0. Identifique o estado fundamental e a sua energia.

2. Considere agora que é aplicado ao sistema uma perturbação descrita naquela base por

$$H_1 = \eta \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix}$$

onde $\eta \ll 1$ é adimensional. Calcule as correções de primeira ordem aos níveis de energia do sistema não perturbado.

3. Calcule as correções de 2ª ordem usando teoria de perturbações.

4. Resolva o problema exactamente para o Hamiltoniano $H = H_0 + H_1$ e compare com os resultados da alínea anterior, no limite em que $\eta \ll 1$.

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. Um campo magnético $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ é aplicado segundo o eixo dos z. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S} \cdot \vec{B} = \hbar\omega\ \sigma_z$$

onde $\omega = \dfrac{eB_0}{2m}$. No instante $t = 0$, o sistema está no estado com spin $\hbar/2$ segundo o eixo dos x, isto é,

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow, S_x\rangle$$

1. Qual a probabilidade de uma medida do spin segundo o eixo dos y dar o valor $\hbar/2$ para o estado $|\psi(0)\rangle$?
2. Determine o estado do sistema no instante t, $|\psi(t)\rangle$.
3. Determine a probabilidade $P(\uparrow, S_y)$ de uma medida do spin segundo o eixo dos y dar $\hbar/2$, em função do tempo.
4. Determine o tempo mínimo ao fim do qual $P(\uparrow, S_y) = 1$. Comente o resultado.