Mecânica Quântica – Série 2

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2015/2016

`Versão de 28/09/2015`

2.1 Em muitos dos problemas seguintes aparecem integrais gaussianos. Seja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

a) Utilize o `Mathematica` para verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = 1$$

b) Considere agora a função

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Utilizando mudanças de variáveis apropriadas mostre que está normalizada e que

$$\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

onde

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n g(x)$$

2.2 *Gasiorowicz 2.1*

Dada a distribuição nos espaço dos momentos $A(k) = N/(k^2+\alpha^2)$ determine $\psi(x)$. Faça um gráfico de $A(k)$ e $\psi(x)$ e mostre que $\Delta k \Delta x \geq 1$ independente de α.

`Sugestões/Soluções:`

1. O integral
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}}{k^2+\alpha^2}\, e^{i\,kx} dk$$
faz-se utilizando o teorema dos resíduos. O resultado é
$$\psi(x) = \mathcal{N}\frac{\pi}{\alpha}\left[e^{-\alpha x}\theta(x) + e^{\alpha x}\theta(-x)\right]$$
Pode verificar este resultado com o `Mathematica` pois $\psi(x)$ está relacionado com a Transformada de Fourier de $A(k)$ através de
$$\psi(x) = \sqrt{2\pi}\,\texttt{FourierTransform}[\mathcal{N}/(k^2+\alpha^2), k, x]$$

2. Utilize o `Mathematica` para fazer os integrais e obter:
$$\begin{aligned}\Delta k &= \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2} = \alpha \\ \Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\end{aligned}$$

2.3 *Gasiorowicz 2.2*

Num guia de ondas a relação entre o comprimento de onda e a frequência é dada por

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}} \; .$$

Determine a velocidade de grupo.

2.4 Para os dois problema seguintes deve usar o resultado da Eq. 2.13 do livro

$$|\psi(x,t)|^2 = \mathcal{N}^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} \, e^{-\dfrac{\alpha(x - v_g t)^2}{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}}$$

onde

$$v_g = \left(\frac{\partial \omega(k)}{\partial k}\right)_{k=k_0} , \quad \beta = \left(\frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2}\right)_{k=k_0} ,$$

a) Mostre que para $t = 0$ a largura deste pacote de ondas gaussiano é $\sigma_0 = \sqrt{\alpha/2}$, onde, como habitualmente, $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Note que esta definição de largura difere ligeiramente da dada no livro. Utilize o `Mathematica` para fazer os integrais.

b) Mostre que $\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{4\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$.

c) A constante $\mathcal{N}$ destina-se a normalizar a função de onda. Mostre que $\mathcal{N} = (\alpha/4\pi^3)^{1/4}$ e que não depende do tempo.

$\ast\ast$**2.5** *Gasiorowicz 2.6*

Um feixe de eletrões percorre uma distância de 10^4 km. Se a dispersão do grupo de ondas inicial é 10^{-3} m qual é a dispersão do grupo de ondas no final do percurso se a sua energia cinética for: a) 13.6 eV; b) 100 MeV?

Nota: Para partículas relativistas a relação entre a energia e o momento linear é $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

2.6 *Gasiorowicz 2.7*

Considere um grupo de ondas de neutrinos. É uma boa aproximação desprezar a sua massa, portanto $E = pc$. Mostre que um grupo de ondas nestas condições não se dispersa.

$\ast$**2.7** Uma das relações de Heisenberg relaciona a incerteza da energia dum sistema, ΔE, com a incerteza do tempo, Δt, da determinação da mesma: $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Determine a incerteza mínima da energia do estado dum átomo se o eletrão permanece neste estado durante 10^{-8} s. Exprima o resultado em eV.

$\ast$**2.8** a) O mesão π^+ tem a energia de repouso 140 MeV e o tempo de vida 26 ns. Determine a incerteza da energia em MeV, e como fração da energia de repouso.

b) Repita para o mesão π^0 que tem a energia de repouso 135 MeV e o tempo de vida 8.3×10^{-17} s.

c) Repita para o mesão ρ que tem a energia de repouso 765 MeV e o tempo de vida 4.4×10^{-24} s.

2.9 *Gasiorowicz 2.11*
Considere uma função de onda da forma

$$\psi(x) = Ae^{-\mu|x|}$$

Determine A para que a função de onda seja normalizada.

$**$**2.10** *Gasiorowicz 2.15*
Considere a função de onda

$$\psi(x) = \frac{2N \sin kx}{x}$$

Determine N para que a função de onda seja normalizada.
Sugestão: O integral seguinte é útil

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \pi$$

$*$**2.11** *Gasiorowicz 2.16*
Considere a função de onda

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$$

Calcule $\langle x^n \rangle$ para n=1,2. Sem fazer contas qual é o resultado de $\langle x^{17} \rangle$?

2.12 *Gasiorowicz 2.17*
Calcule $\phi(p)$ para a função de onda do problema 2.11. Calcule $\langle p^n \rangle$ para n=1,2.
`Comentários/Soluções:`

1. Obtemos para $\psi(p)$:
$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}}$$
2. Verifique que $\psi(x)$ e $\psi(p)$ estão normalizadas.
3. A igualdade em
$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$
só ocorre para funções de onda gaussianas.

$*$**2.13** *Gasiorowicz 2.18*
Use as definições $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ e $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ e os resultados dos problemas 2.11 e 2.12 para mostrar que

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

∗2.14 Em $t = 0$, o estado duma partícula é representado pela função de onda

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\,\dfrac{x}{a}, & 0 \le x \le a, \\ A\,\dfrac{(b-x)}{(b-a)}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{outros } x, \end{cases}$$

onde A, a e b são constantes, reais e positivas.

a) Normalize Ψ, *i.e.*, determine A em termos de a e b.

b) Faça um esboço de $\Psi(x, 0)$ como função de x.

c) Onde é que a partícula mais provavelmente será encontrada (em $t = 0$)?

d) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de a? Verifique a validade do seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$.

e) Determine o valor esperado (médio) de x, $\langle x \rangle$.

∗∗2.15 Uma partícula é representada, no instante $t = 0$, pela função de onda

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & -a \le x \le a, \\ 0, & \text{outros } x. \end{cases}$$

onde A é uma constante real e positiva.

a) Determine a constante de normalização A.

b) Calcule o valor médio de x (em $t = 0$).

c) Calcule o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda em termos das coordenadas, $\Psi(x, 0)$.

d) Determine a função de onda no espaço dos momentos $\phi(p)$. Faça um esboço dessa função. Calcule agora o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda $\phi(p)$.

∗∗2.16 Para a função de onda do problema anterior determine:

a) O valor médio de x^2.

b) O valor médio de p^2.

c) A incerteza em x, σ_x.

d) a incerteza em p, σ_p.

e) Verifique que os resultados são compatíveis com o princípio de incerteza de Heisenberg.

2.17 *Adaptado de Griffiths 1.18*

Em geral, a mecânica quântica é relevante quando o comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, é maior que o tamanho característico do sistema, d. Em equilíbrio térmico à temperatura absoluta T, a energia cinética média é

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T$$

onde $k_B = 1.380 \times 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K é a constante de Boltzmann.

a) Mostre que o comprimento de de Broglie típico é dado por

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} = 6.23 \left(\frac{m_e}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{300 \text{ K}}{T(\text{ K})}\right)^{1/2} \text{ nm}$$

b) Sabendo que o espaçamento típico dos sólidos e líquidos é $d \simeq 0.3$ nm, verifique que para as temperaturas usuais os eletrões livres nos sólidos devem obedecer à mecânica quântica enquanto que os núcleos não. Tome o sódio como exemplo com $m_{NA} \simeq 23m_p \simeq 42300m_e$. Verifique que o hélio abaixo de 4 K é uma exceção.

c) Mostre que os átomos num gás ideal devem obedecer à mecânica quântica para temperaturas tais que

$$T < \frac{1}{k_B}\left(\frac{h^2}{3m}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

onde P é a pressão. `Sugestão:` Use a lei dos gases perfeitos, $PV = Nk_B T$, para deduzir o espaçamento interatómico num gás. Verifique com o hélio à pressão atmosférica.

d) Use os resultados da alínea c) para se decidir se o hidrogénio no espaço interestelar, onde $d = 1$ cm e $T \simeq 3$ K tem comportamento quântico.