1º Teste MQ 2015/2016 (7/11/2015)

I

1) Falsa $\quad [H,x] = [\frac{p^2}{2m}, x]$ é proporcional a p e portanto $[[H,x],p]=0$

2) Verdadeira. $\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{\varepsilon} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\beta\psi(0) < 0$. Como $\psi(0)>0$ devemos ter $\beta<0$.

3) Falsa. A variável que controla o número de estados ligados é $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ e portanto $\lambda(\frac{V_0}{2}, 2a) \neq \lambda(V_0, a)$.

4) Falsa $\quad$ São estados próprios do operador A^+A com valor próprio n: $\quad A^+A|n\rangle = \sqrt{n}\,A^+|n-1\rangle = n|n\rangle$

II

1) Escrevemos

$$\psi(x,0) = A\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= A\left[u_0(x) + u_1(x)\right]$$

onde u_0 e u_1 estão dados no formulário:

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_0(y)\, e^{-y^2/2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$u_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_1(y)\, e^{-y^2/2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Obtemos portanto

$$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x)$$

Com $A_0 = A$; $A_1 = A$; $A_n = 0$ $n \geq 2$. Logo

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 = 2A^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(Real e positivo)}$$

2) $P(E=E_1) = |A_1|^2 = A^2 = \frac{1}{2}$

$$\langle H \rangle = \sum_n |A_n|^2 E_n = \frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2} E_1 = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega$$

3) <u>usando A, A^+:</u>

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi | (A + A^+) | \psi \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\frac{1}{2} \left(\langle 0| + \langle 1| \right) \left(A + A^+ \right) \left(|0\rangle + |1\rangle \right) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\frac{1}{2} \left(\langle 0| + \langle 1| \right) \left(|0\rangle + |1\rangle + \sqrt{2} |2\rangle \right) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\frac{1}{2} \left(\langle 0|0\rangle + \langle 1|1\rangle \right) \right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

onde se usou $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

<u>usando integrais</u>

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x,0)\, x\, \psi(x,0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[u_0^2(x)\, x + u_1^2(x)\, x + 2 u_0 u_1 x \right.$$

os dois primeiros integrais anulam-se por serem funções impar

Logo

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u_0(x)\, u_1(x)\, x$$

$$= \frac{2}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x\,\sqrt{2}\,y\,e^{-y^2}$$

$$\boxed{\text{con } y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x \qquad dx=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,dy}$$

$$= \frac{2}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\frac{\hbar}{m\omega}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m\omega}}\; 2\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m\omega}}\; 2\times 2\;\underbrace{\int_{0}^{\infty} dy\, y^2 e^{-y^2}}_{\frac{1}{2}\Gamma(3/2)}$$

$$\boxed{\Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

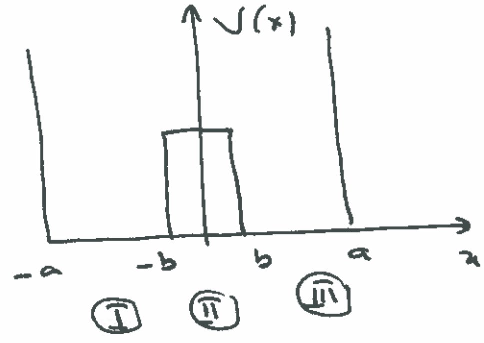
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m\omega}}\;\frac{4}{4}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,.$$

4) $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_0(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_1(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}u_0(x)\,e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_1(x)\,e^{-i\frac{3\omega}{2}t}$$

$\psi(x,T)=\psi(x,0) \Rightarrow \frac{\omega}{2}T = 2\pi \Rightarrow T=\frac{4\pi}{\omega}$. Notar que $\frac{3\omega}{2}T = 6\pi$

1) $V(x) = V(-x)$ portanto podemos separar as soluções em pares e ímpares. Para $E < V_0$ temos



Região I e III

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0$$

Região II

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0 .$$

Portanto:

Soluções Pares: $u(x) = u(-x)$

$$\begin{cases} u_{I}(x) = A \sin[k(a+x)] \\ u_{II}(x) = B \cosh \alpha x \\ u_{III}(x) = A \sin[k(a-x)] \end{cases}$$

onde já escolhemos as soluções em I e III para satisfazerem $u_I(-a) = u_{III}(a) = 0$. Basta determinar as condições em $x = b$. Temos

$$\begin{cases} B \cosh \alpha b = A \sin[k(a-b)] \\ \alpha B \sinh \alpha b = -A k \cos[k(a-b)] \end{cases}$$

Dividindo ambos os termos obtemos

$$\boxed{\tan k\Delta = -\frac{k}{\alpha} \coth \alpha b} \qquad \Delta = a - b$$

Soluções ímpares: $u(x) = -u(-x)$

$$\begin{cases} u_I(x) = -A \sin[k(a+x)] \\ u_{II}(x) = B \sinh \alpha x \\ u_{III}(x) = A \sin[k(a-x)] \end{cases}$$

Novamente basta determinar as condições em $x=b$. Temos

$$\begin{cases} B \sinh \alpha b = A \sin[k(a-b)] \\ \alpha B \cosh \alpha b = -A k \cos[k(a-b)] \end{cases}$$

donde

$$\boxed{\tan k\Delta = -\frac{k}{\alpha} \tanh \alpha b}$$

2) Como habitualmente o primeiro estado par é, a existir o estado fundamental (Podemos verificar isto depois). Assim queremos ver qual a condição para que a equação para os estados pares tenham solução.

Como habitualmente definimos

$$y = k\Delta \quad ; \quad \alpha\Delta = \sqrt{\lambda - y^2} \quad ; \quad \lambda = \frac{2mV_0\Delta^2}{\hbar^2}$$

Logo escrevemos a equação na forma

$$\boxed{\tan y = -\frac{y}{\sqrt{\lambda - y^2}} \coth\left[\frac{b}{\Delta}\sqrt{\lambda - y^2}\right]}$$

Como o segundo membro é sempre negativo, devemos ter

$$y \geq \pi/2$$

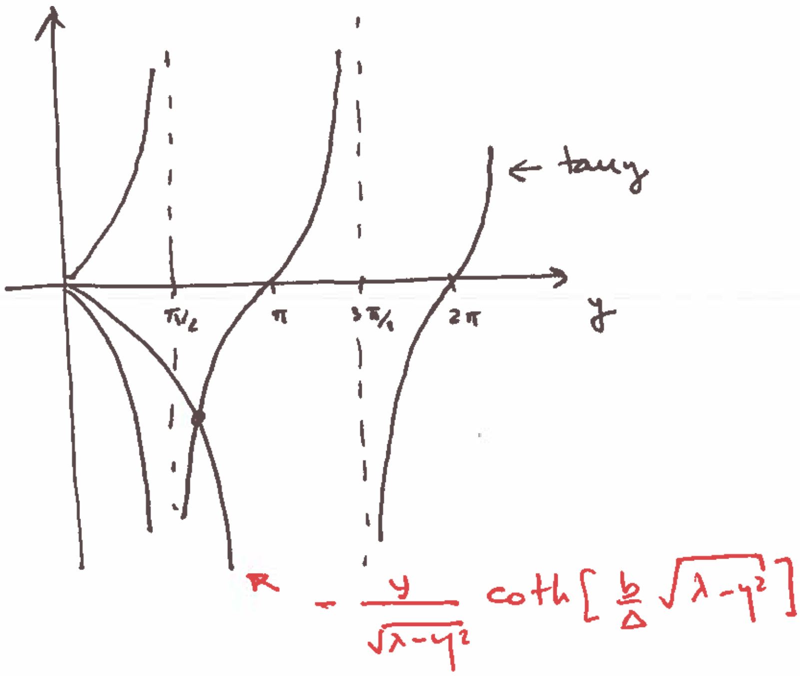
para poder ter solução. Por outro lado devemos ter também

$$y \leq \sqrt{\lambda}$$

Portanto só há solução se

$$\sqrt{\lambda} \geq \pi/2 \Rightarrow \lambda \geq \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{2mV_0\Delta^2}{\hbar^2} \geq \frac{\pi^2}{4}.$$

Graficamente:



Para $E \ll V_0$ tomamos $V_0 \to \infty$ ou $\lambda \to \infty$. Então quando $\lambda \to \infty$

$$-\frac{y}{\sqrt{\lambda-y^2}}\coth\left[\frac{b}{\Delta}\sqrt{\lambda-y^2}\right] \to -\frac{y}{\sqrt{\lambda-y^2}} \to 0$$

e obtemos

$$\tan k\Delta = 0$$

ou seja

$$k\Delta = n\pi \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\Delta^2} n^2$$

Para as soluções ímpares, atendendo que também

$$\lim_{\lambda \to \infty} \tanh\left[\frac{b}{\Delta}\sqrt{\lambda - y^2}\right] = 1$$

também temos

$$\tan k\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\Delta^2} n^2}$$

Conclusão: o problema separa-se em dois poços de largura Δ com a mesma energia $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\Delta^2} n^2$.

3) $E > V_0$.

Soluções Pares:

$$\begin{cases} u_{I}(x) = A \sin[k(a+x)] \\ u_{II}(x) = B \cos qx \\ u_{III}(x) = A \sin[k(a-x)] \end{cases} \qquad q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_0 - V_0)}$$

As condições em $x = b$ dão agora

$$\begin{cases} B \cos qb = A \sin[k(a-b)] \\ -Bq \sin qb = -Ak \cos[k(a-b)] \end{cases}$$

donde

$$\boxed{\tan k\Delta = \frac{k}{q} \cot qb} \qquad \Delta = a - b$$

Soluções Ímpares

$$\begin{cases} u_{I}(x) = -A\sin[k(a+x)] \\ u_{II}(x) = B\sin qx \\ u_{III}(x) = A\sin[k(a-x)] \end{cases}$$

As condições em $x=b$ dão agora

$$\begin{cases} B\sin qb = A\sin[k(a-b)] \\ Bq\cos qb = -Ak\cos[k(a-b)] \end{cases}$$

donde se obtém

$$\boxed{\tan k\Delta = -\frac{k}{q}\tan qb}$$

As soluções pares têm sempre solução. Para ver isso façamos $\lambda = \frac{2mV_0\Delta^2}{\hbar^2}$, $y = k\Delta$. Temos para as soluções pares

$$\boxed{\tan y = \frac{y}{\sqrt{y^2-\lambda}}\cot\left[\frac{b}{\Delta}\sqrt{y^2-\lambda}\right]}$$

Devemos ter $y \geq \sqrt{\lambda}$. Para $y=\sqrt{\lambda}$ $\cot(0)=\infty$. Para $\frac{b}{\Delta}\sqrt{y^2-\lambda} = \frac{\pi}{2}$ o segundo membro é zero. Para $\frac{b}{\Delta}\sqrt{y^2-\lambda}=\pi$ temos $\cot(\pi) = -\infty$. Portanto o segundo membro é uma função monotonicamente decrescente com valor $]+\infty, -\infty[$ e certamente que vai intersectar a $\tan y$, nesse intervalo.

4) Consideremos as soluções da alínea anterior quando $E >> V_0$. Neste limite

$$q \to k$$

e obtemos:

<u>Soluções Pares</u>

$$\tan[k(a-b)] = \cot(kb) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - kb\right)$$

logo

$$k(a-b) = \frac{\pi}{2} - kb + (n-1)\pi \qquad n = 1, 2, \dots$$

obtemos então

$$ka = \frac{\pi}{2}(1 + 2n - 2) = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$k = \frac{\pi(2n-1)}{2a}$$

e

$$\boxed{E_n^+ = \frac{\hbar^2 \pi^2 (2n-1)^2}{2m(2a)^2}} \qquad n = 1, 2.$$

que são as soluções pares para uma caixa de largura $2a$ (ver formulário)

<u>Soluções Ímpares</u>

$$\tan[k(a-b)] = -\tan(kb) = \tan(-kb)$$

Logo

$$k(a-b) = -kb + n\pi \qquad n = 1, 2, \dots$$

Donde

$$ka = n\pi \quad \Rightarrow \quad k(2a) = \pi(2n)$$

$$\boxed{E_n^- = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}(2n)^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Conclusão: Para $E \gg V_0$ a barreira de altura V_0 é desprezível.

5) $E > V_0$ mas $\boxed{b = 0}$

Soluções Pares

$$\tan ka = +\infty$$

$$ka = \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{E_n^+ = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}(2n-1)^2}$$

Soluções Ímpares

$$\tan ka = 0$$

$$ka = n\pi \quad \Rightarrow \quad k(2a) = (2n)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{E_n^- = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}(2n)^2}$$

Conclusão: este resultado deve ser óbvio pois neste limite a barreira intermédia desaparece, e as energias são de uma caixa de largura $(2a)$.