Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2015-16

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

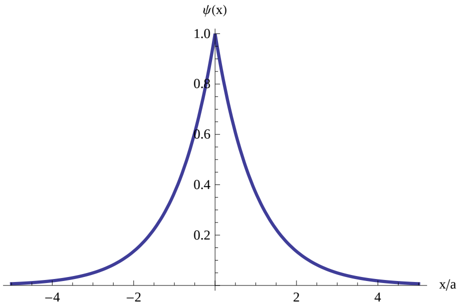
1° Teste: 7 de Novembro de 2015 – 9h30

Duraçao do teste: 1h30

I (4 valores)

Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Para problemas a uma dimensão tem-se sempre $[[H, x], p] \neq 0$ com $H = p^2/2m + V(x)$.
2. Considere a função de onda representada na figura



   Sabe-se que esta função representa a função de onda duma partícula sob a acção dum potencial $V(x) = \beta\delta(x)$. Então $\beta < 0$.
3. Um poço de potencial "rectangular" de largura a e profundidade V_0 tem os mesmos estados ligados dum poço de largura $2a$ e profundidade $V_0/2$.
4. Os estados próprios do oscilador harmónico $|n\rangle$ são estados próprios do operador $A^\dagger A$ com valor próprio $n + \frac{1}{2}$.

II (8 valores)

Uma partícula de massa m no potencial do oscilador harmónico, no instante inicial é descrita pela função de onda

$$\psi(x, 0) = A \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

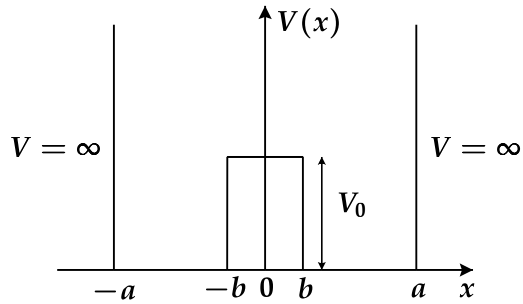
com A real e positivo.

1. Determine A. (**Sugestão**: Antes de começar a fazer integrais use o postulado da expansão $\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x)$, onde $u_n(x)$ são as funções próprias normalizadas do oscilador harmónico dadas no formulário).
2. Qual a probabilidade duma medida da energia dar o valor $E_1 = 3/2\,\hbar\omega$? Qual o valor médio da energia?
3. Qual o valor médio de x, $\langle x \rangle$? **Nota:** Este problema é mais facilmente resolvido em termos dos operadores A e $A^\dagger$. Se fizer com as funções de onda e pensar bem só tem de fazer um integral. Os integrais necessários estão no formulário.
4. Escreva $\psi(x, t)$, e determine o tempo mínimo T tal que $\psi(x, T) = \psi(x, 0)$.

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ 0 & -a < x < -b \\ V_0 & -b < x < b \\ 0 & b < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$



com $V_0 > 0$.

1. Considere $E < V_0$. Mostre que as equações para os estados ligados se escrevem

$$\begin{cases} \tan k\Delta = -\dfrac{k}{\alpha} \coth \alpha b & \textit{pares} \\ \tan k\Delta = -\dfrac{k}{\alpha} \tanh \alpha b & \textit{impares} \end{cases}$$

   onde, como habitualmente, $\Delta = a - b$, $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$.

2. Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados para $E < V_0$? Se $V_0 \gg E$ qual a energia do estado fundamental. Comente o resultado que obteve.

3. Para $E > V_0$ mostre que as equações dos estados ligados são agora,

$$\begin{cases} \tan k\Delta = \dfrac{k}{q} \cot qb & \textit{pares} \\ \tan k\Delta = -\dfrac{k}{q} \tan qb & \textit{impares} \end{cases}$$

   onde agora $q = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}$. Haverá neste caso sempre estados ligados?

4. Mostre que para $E \gg V_0$ as energias desses estados se aproximam das energias duma partícula numa caixa de largura $2a$.

5. Para $E > V_0$ obtenha o limite $b \to 0$ para as energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado. Explique o resultado em termos das soluções duma partícula numa caixa de largura $2a$,

---

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
  $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\, n^2 \,.$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
  $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{aligned} u_n^-(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) & \qquad E_n^- &= E_0\ (2n)^2 \\ u_n^+(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a} x\right] & \qquad E_n^+ &= E_0\ (2n-1)^2 \end{aligned} \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\,.$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**

As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, H_n(y)\, e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Os integrais importantes são

$$\int_0^\infty dx\, x^{2\alpha-1}e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \hbar\omega\left(A^+A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

As relações inversas são

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A + A^+\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(A - A^+\right)$$

Os estados corretamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n|0\rangle$$

com $A\,|0\rangle = 0$ e

$$A\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad A^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$