# Mecânica Quântica, 2º Teste, 19/12/2016



## I

1) verdadeira $\quad |\psi_{210}|^2$ é par e $z$ é ímpar logo $\int d^3r\,|\psi_{210}|^2 z = 0$

2) falsa $\quad \cos^2\theta = \sqrt{\frac{16\pi}{45}}\,Y_{20} + \sqrt{\frac{4\pi}{9}}\,Y_{00}$ e portanto a probabilidade duma medida de $L_z = 0$ é 1.

3) Falsa $\quad$ Da Tabela de Clebsch-Gordon deveria ser

$$|3,-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|2,0\rangle|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\,|2,-1\rangle|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$$

4) Verdadeira $\quad$ o estado up na direcção $\vec{n}$ ($\theta = 60°$ e $\phi = 0$) é

$$|\uparrow\vec{n}\rangle = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e portanto $P(S_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{3}{4}$; $P(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{4}$.

## II

1) Ambos os estados $\psi_{2,1,1}$ e $\psi_{2,1,-1}$ correspondem a $n=2$, portanto

$$\langle H\rangle = E_2|a|^2 + E_2|b|^2 = E_2\underbrace{(|a|^2+|b|^2)}_{=1} = E_2$$

Com $\quad E_2 = -\frac{1}{2}\mu c^2\alpha^2\,\frac{1}{4}$

Para o valor médio de $L_z$ temos

$$\langle L_z\rangle = |a|^2\hbar - |b|^2\hbar = \hbar(|a|^2 - |b|^2) = \tfrac{1}{2}\hbar$$

Por outro lado, da normalização temos

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Então

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |a|^2 - |b|^2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow |a|^2 = \frac{3}{4} \quad , \quad |b|^2 = \frac{1}{4}$$

como são reais e positivos, temos

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad b = \frac{1}{2}$$

2) Temos

$$\langle r \rangle_\psi = \langle \psi(\vec{r}) | r | \psi(\vec{r}) \rangle$$

Com

$$\psi(\vec{r}) = R_{21}(r) \left[ a\, Y_{21} + b\, Y_{2,-1} \right]$$

Então

$$\langle r \rangle_\psi = \int_0^\infty dr\, r^2 R_{21}^2(r)\, r \int d\Omega \left( a Y_{21}^* + b Y_{2,-1} \right) \left( a Y_{21} + b Y_{2,-1} \right)$$

onde estamos a usar $a, b$ reais. Usando agora

$$\int d\Omega\, Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

obtemos

$$\langle r \rangle_\psi = \int_0^\infty dr\, r^3 R_{21}^2(r) \underbrace{(a^2 + b^2)}_{=1}$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^3 \left( \frac{r}{a_0} \right)^2 e^{-r/a_0}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^3 \int_0^\infty dr\, r^3 \left( \frac{r}{a_0} \right)^2 e^{-r/a_0}$$

com a mudança de variável $y = \frac{r}{a_0}$, obtemos

$$\langle r \rangle_\psi = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^3 a_0^4 \int_0^\infty dy\, y^5 e^{-y}$$

Do formulário

$$\int_0^\infty dy\, y^5 e^{-y} = 5! = 120$$

e portanto

$$\langle r \rangle_4 = \frac{a_0}{24} \times 120 = 5a_0$$

III

1) Comecemos pelos valores próprios. Temos

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & E \\ E & E-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (E-\lambda)^2 - E^2 = 0$$

ou ainda

$$\lambda^2 - 2E\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2E) = 0$$

Portanto os valores próprios são $E_1 = 0$ e $E_2 = 2E$. Determinemos os vectores próprios: $|1\rangle$ corresponde ao estado fundamental com $E_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} E & E \\ E & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow E(a+b) = 0 \Rightarrow b = -a$$

Portanto normalizando

$$\boxed{|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle} \quad \text{com} \quad \boxed{E_1 = 0}$$

Para $E_2 = 2E$

$$\begin{bmatrix} E & E \\ E & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2E \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E(a+b) = 2Ea \\ E(a+b) = 2Eb \end{cases} \Rightarrow a = b$$

Normalizando

$$\boxed{|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle} \quad \text{com} \quad \boxed{E_2 = 2E}$$

2) As correções têm de ser calculadas na base dos estados próprios $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Como a perturbação já está escrita nesta base podemos ler que em 1ª ordem

$$\Delta E_1^{(1)} = \langle 1|H_1|1\rangle = 0$$

$$\Delta E_2^{(1)} = \langle 2|H_1|2\rangle = 0$$

3) Temos, usando a expressão da teoria de perturbações

$$\Delta E_1^{(2)} = \frac{|\langle 1|H_1|2\rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{\Delta^2}{-2E} = -\frac{\Delta^2}{2E}$$

onde se leu da matriz de $H_1$

$$\langle 1|H_1|2\rangle = \langle 2|H_1|1\rangle = \Delta$$

Para o outro estado

$$\Delta E_2^{(2)} = \frac{|\langle 2|H_1|1\rangle|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = \frac{\Delta^2}{2E}$$

4) As matrizes de $H_0$ e $H_1$ no enunciado estão em bases diferentes. Mas, como vimos na alínea 1) a matriz de $H_0$ na base $|1\rangle$ e $|2\rangle$ é diagonal e dada por

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 2E \end{bmatrix}$$

Logo nesta base

$$H = H_0 + H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 2E \end{bmatrix}$$

Calculemos agora os valores próprios exactos.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \Delta \\ \Delta & 2E-\lambda \end{vmatrix}^2 = 0 \Rightarrow -\lambda(2E-\lambda) - \Delta^2 = 0$$

ou seja

$$\lambda^2 - 2\lambda E - \Delta^2 = 0$$

e portanto

$$E_1, E_2 = E \mp \sqrt{E^2 + \Delta^2}$$

$E_1 \to$ Sinal $-$
$E_2 \to$ Sinal $+$

Se $\Delta \ll E$ obtemos

$$E_1 = E - \sqrt{E^2 + \Delta^2} = E - E\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{E^2}}$$

$$\simeq E - E\left(1 + \frac{\Delta^2}{2E^2}\right) = -\frac{\Delta^2}{2E}$$

$$E_2 = E + \sqrt{E^2 + \Delta^2} = E + E\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{E^2}}$$

$$\simeq E + E\left(1 + \frac{\Delta^2}{2E^2}\right) = 2E + \frac{\Delta^2}{2E}$$

em acordo com a alínea 3)

IV

1) $|\psi(0)\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Decompomos na base de spin segundo $\vec{e}_x$. Obtemos

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|\uparrow \vec{e}_x\rangle + \beta|\downarrow \vec{e}_x\rangle$$

Com (ver formulário para $\theta=\pi/2$ e $\varphi=0$),

$$|\uparrow \vec{e}_x\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad |\downarrow \vec{e}_x\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Então (usando a ortonormalização dos estados)

$$\alpha = \langle \uparrow \vec{e}_x | \psi(0)\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e a probabilidade duma medida de $S_x$ dar $\frac{\hbar}{2}$ é $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}$.

2) O Hamiltoniano é

$$H = \hbar\omega_0 \sigma_y$$

Portanto os estados próprios de $H$ são os estados próprios de $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$. Do formulário estes são ($\theta=\pi/2$, $\varphi=\pi/2$)

$$|\uparrow \vec{e}_y\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \; ; \; |\downarrow \vec{e}_y\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

os valores próprios são

$$H|\uparrow \vec{e}_y\rangle = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hbar\omega_0}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H|\downarrow \vec{e}_y\rangle = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hbar\omega}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Portanto, de acordo com as regras básicas de MQ 7

$$|\psi(t)\rangle = \gamma\,|\uparrow \vec{e}_y\rangle\, e^{-i\omega_0 t} + \delta\,|\downarrow \vec{e}_y\rangle\, e^{i\omega_0 t}$$

onde $\gamma = \langle \uparrow \vec{e}_y | \psi(0)\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\delta = \langle \downarrow y | \psi(0)\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{i}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e obtemos

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow \vec{e}_y\rangle\, e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow \vec{e}_y\rangle\, e^{i\omega_0 t}}$$

Para saber a probabilidade duma medida de $S_x$ dar $\frac{\hbar}{2}$ temos de escrever

$$|\psi(t)\rangle = \alpha'\,|\uparrow \vec{e}_x\rangle + \beta'\,|\downarrow \vec{e}_x\rangle$$

Só queremos $\alpha'$. É dado por

$$\alpha' = \langle \uparrow \vec{e}_x | \psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}\\ \frac{i}{2}e^{-i\omega_0 t} - \frac{i}{2}e^{i\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t)$$

Portanto

$$P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(t) = |\alpha'|^2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t\right)$$

$$P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2\omega_0 t\right)$$

que verifica o resultado de 1) que $P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(0) = \frac{1}{2}$. Para ter $P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(T)=1$ devemos ter (o tempo mínimo)

$$2\omega_0 T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{4\omega_0}}$$

3) Usando

$$|\psi(T)\rangle = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 T \\ \sin\omega_0 T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \text{para } \omega_0 T = \frac{\pi}{4}$$

e como $H$ para $t > T$ é

$$H_0 = \hbar\omega\,\sigma_z \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com vectores próprios $|\uparrow\vec{e}_z\rangle$ de valor próprio $\hbar\omega_0$ e $|\downarrow\vec{e}_z\rangle$ de valor próprio $-\hbar\omega_0$ escrevemos para $t = T$

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\vec{e}_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\vec{e}_z\rangle$$

e $(t>T)$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\vec{e}_z\rangle e^{-i\omega_0(t-T)} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\vec{e}_z\rangle e^{i\omega_0(t-T)}$$

para $t > T$. Obtemos então

$$|\psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\vec{e}_z\rangle e^{-i\omega_0 T} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\vec{e}_z\rangle e^{i\omega_0 T}$$

ou

$$|\psi(2T)\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 T} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} |\uparrow \breve{e}_y\rangle$$

Decompomos agora este estado em estados próprios de $\breve{e}_y$

$$|\psi(2T)\rangle = \gamma' |\uparrow \breve{e}_y\rangle + \delta' |\downarrow \breve{e}_y\rangle$$

Com

$$\gamma' = \langle \uparrow \breve{e}_y | \psi(2T)\rangle = e^{-i\pi/4}$$

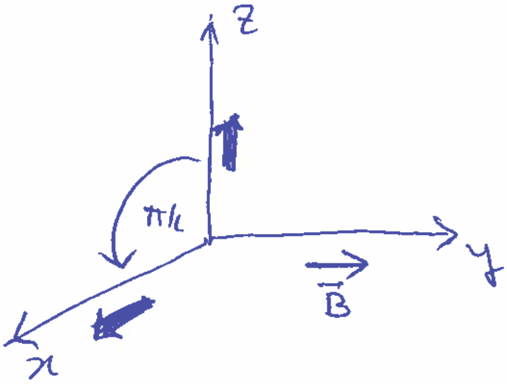
$$\delta' = \langle \downarrow \breve{e}_y | \psi(2T)\rangle = 0$$

Portanto

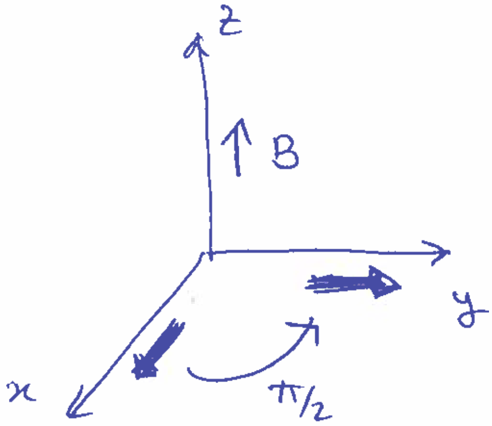
$$P_{S_y=\frac{\hbar}{2}}(2T) = |\gamma'|^2 = 1.$$

<u>Comentário</u>. O spin precessa com frequência $2\omega_0$ em torno do campo magnético. Na alínea 2) $2\omega_0 T = \pi/2$ e portanto o spin inicialmente $|\uparrow \breve{e}_z\rangle$ roda para $|\uparrow \breve{e}_x\rangle$ por aplicação dum campo segundo $\breve{e}_y$. Nesta alínea

aplicarmos um campo segundo $\vec{e}_z$ também (10)
com $2\omega_0 T = \pi/2$ e portanto o spin roda de
$|\uparrow \vec{e}_x\rangle$ para $|\uparrow \vec{e}_y\rangle$.




Alínea 2)




Alínea 3)