

Capítulo 6

Correcções Radiativas

6.1 Renormalização a 1 loop

Vamos considerar a teoria descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + eA - m)\psi . \quad (6.1)$$

Os propagadores livres são

$$\beta \xrightarrow[p]{} \alpha \quad \left(\frac{i}{\cancel{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\beta\alpha} \equiv S_{F\beta\alpha}^0(p) \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \nu \quad & -i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{(\xi - 1)}{1} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \right] \\ & = -i \left\{ \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right\} \\ & \equiv G_{F\mu\nu}^0(k) \end{aligned} \quad (6.3)$$

O vértice é

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \swarrow \\ p' \\ \text{---} \text{wavy} \text{---} \mu \\ \searrow \\ p \\ \beta \end{array} + ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha} \quad e = |e| > 0 \quad (6.4)$$

Vamos agora considerar as correções radiativas a *one-loop*, para os propagadores e para o vértice. Para simplificar os cálculos vamos trabalhar na gauge de Feynman ($\xi = 1$).

6.1.1 Polarização do vácuo

Em primeira ordem a contribuição para o propagador do fóton é dada pelo diagrama da Figura 6.1 que escrevemos na forma

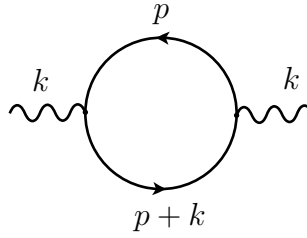


Figura 6.1: Polarização do vácuo

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(k) \equiv G_{\mu\mu'}^0 i \Pi^{\mu'\nu'}(k) G_{\nu'\nu}^0(k) \quad (6.5)$$

onde

$$\begin{aligned} i \Pi_{\mu\nu} &= -(+ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \right) \\ &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[2p_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - p \cdot k - m^2)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (6.6) \end{aligned}$$

Simple contagem de potências de p mostra que este integral, é quadraticamente divergente. De facto a divergência é, como veremos, apenas logarítmica. Sendo o integral divergente temos que o regularizar primeiro para depois absorvermos essas divergências nos parâmetros da teoria. Aqui vamos usar o método de regularização dimensional. Se definirmos $\epsilon = 4 - d$, no fim de termos feito o integral devemos obter um resultado divergente quando $\epsilon \rightarrow 0$. Obtemos portanto¹

$$\begin{aligned} i \Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) &= -4e^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{[2p_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 + p \cdot k - m^2)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ &= -4e^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p, k)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (6.7) \end{aligned}$$

¹Onde μ é um parâmetro com as dimensões de massa introduzido para assegurar a dimensionalidade correcta da constante de acoplamento em dimensão d , isto é, $[e] = \frac{4-d}{2} = \frac{\epsilon}{2}$. Assim pomos $e \rightarrow e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$. Para mais detalhes ver o Apêndice.

onde

$$N_{\mu\nu}(p, k) = 2p_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 + p \cdot k - m^2) \quad (6.8)$$

Para calcular este integral usamos primeiro a parametrização de Feynman para reescrever o denominador como um termos único. No caso de dois denominadores é (ver secção A.3)

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (6.9)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} i \Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) &= -4e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p, k)}{[x(p+k)^2 - xm^2 + (1-x)(p^2 - m^2) + i\epsilon]^2} \\ &= -4e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 + k \cdot px + xk^2 - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= -4e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p, k)}{[(p+kx)^2 + k^2x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para uma dimensão d suficientemente pequena o integral converge e podemos fazer a mudança de variável

$$p \rightarrow p - kx \quad (6.11)$$

Obtemos então

$$i \Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) = -4e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p - kx, k)}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} \quad (6.12)$$

onde

$$C = m^2 - k^2x(1-x) \quad (6.13)$$

$N_{\mu\nu}$ é um polinómio de segundo grau no momento do *loop* como se pode ver na Eq. (6.8). Contudo como o denominador da Eq. (6.12) só depende em p^2 podemos facilmente mostrar as relações

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} &= 0 \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} &= \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Isto quer dizer que apenas temos de calcular integrais da forma

$$\begin{aligned} I_{r,m} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^r}{[p^2 - C + i\epsilon]^m} \\ &= \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^d} \int dp^0 \frac{(p^2)^r}{[p^2 - C + i\epsilon]^m} \end{aligned} \quad (6.15)$$

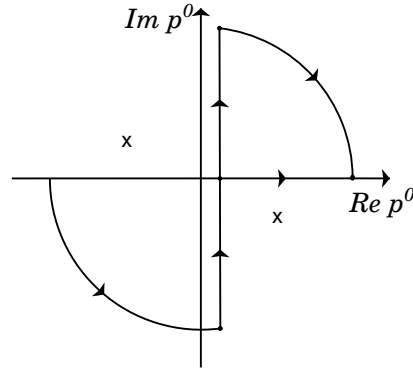


Figura 6.2:

Para efectuar esta integração vamos usar o integral no plano da variável complexa p^0 como indicado na Fig. 6.2. A deformação do contorno é a chamada rotação de Wick e é permitida devido à localização dos pólos com a prescrição de Feynman. Obtemos

$$p^0 \rightarrow ip_E^0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_E^0 \quad (6.16)$$

e $p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = -(p_E^0)^2 - |\vec{p}|^2 \equiv -p_E^2$, onde $p_E = (p_E^0, \vec{p})$ é um vector euclidiano, isto é

$$p_E^2 = (p_E^0)^2 + |\vec{p}|^2 \quad (6.17)$$

Podemos escrever então (para mais detalhes ver a Ref. [27])

$$I_{r,m} = i(-1)^{r-m} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^{2r}}{[p_E^2 + C]^m} \quad (6.18)$$

onde já não precisamos do $i\epsilon$ porque o denominador é definido positivo² ($C > 0$). Para continuar com o cálculo de $I_{r,m}$ escrevemos.

$$\int d^d p_E = \int d\bar{p} \bar{p}^{d-1} d\Omega_{d-1} \quad (6.19)$$

onde $\bar{p} = \sqrt{(p_E^0)^2 + |\vec{p}|^2}$ é o comprimento do vector p_E no espaço euclidiano em d dimensões e $d\Omega_{d-1}$ é o ângulo sólido que generaliza as coordenadas esféricas nesse espaço. Podemos mostrar que

$$\int d\Omega_{d-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (6.20)$$

O integral em \bar{p} faz-se usando o resultado,

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + a^n)^q} = \pi(-1)^{q-1} a^{p+1-nq} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n})}{n \sin(\pi \frac{p+1}{n}) \Gamma(\frac{p+1}{2} - q + 1)} \quad (6.21)$$

²O caso $C < 0$ obtém-se por continuação analítica.

e obtemos finalmente

$$I_{r,m} = iC^{r-m+\frac{d}{2}} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(r+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(m-r-\frac{d}{2})}{\Gamma(m)} \quad (6.22)$$

Recordemos que a representação integral de $I_{r,m}$, Eq. (6.15) é só válida para $d < 2(m-r)$ para assegurar a convergência do integral quando $\bar{p} \rightarrow \infty$. Contudo, a forma final da Eq. (6.22) pode ser continuada analiticamente para todos os valores de d com exceção daqueles onde a função $\Gamma(m-r-d/2)$ tem pólos, que são (ver secção A.2),

$$m-r-\frac{d}{2} \neq 0, -1, -2, \dots \quad (6.23)$$

Para a aplicação à regularização dimensional é conveniente escrever a Eq. (6.22) depois de fazer a substituição $d = 4 - \epsilon$. Obtemos

$$I_{r,m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} \frac{\Gamma(m-r-2+\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(m)} \quad (6.24)$$

que tem pólos para $m-r-2 \leq 0$ (ver secção A.2).

Voltamos agora ao cálculo de $\Pi_{\mu\nu}$. Primeiro notemos que depois duma mudança de variáveis na Eq. (6.11) obtemos

$$N_{\mu\nu}(p-kx, k) = 2p_\mu p_\nu + 2x^2 k_\mu k_\nu - 2xk_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} (p^2 + x^2 k^2 - xk^2 - m^2) \quad (6.25)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu\nu} &\equiv \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p-kx, k)}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} \\ &= \left(\frac{2}{d} - 1\right) g_{\mu\nu} \mu^\epsilon I_{1,2} + \left[-2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)k^2 g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2\right] \mu^\epsilon I_{0,2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Usando agora a Eq. (6.24)

$$\begin{aligned} \mu^\epsilon I_{0,2} &= \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (6.27)$$

onde usámos a expansão da função Γ , Eq. (A.14),

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.28)$$

onde γ é a constante de Euler e definimos,

$$\Delta_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \quad (6.29)$$

Dum modo semelhante

$$\begin{aligned}\mu^\epsilon I_{1,2} &= -\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} C \frac{\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} \frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} C \left(1 + 2\Delta_\epsilon - 2 \ln \frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}\quad (6.30)$$

Devido à existência do pólo em $1/\epsilon$ nas expressões anteriores, temos que expandir todas as quantidades até à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$. Isto quer dizer, por exemplo, que

$$\frac{2}{d} - 1 = \frac{2}{4 - \epsilon} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\quad (6.31)$$

Substituindo na Eq. (6.26), e usando a Eq. (6.13), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \left[\frac{i}{16\pi^2} C \left(1 + 2\Delta_\epsilon - 2 \ln \frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &\quad + \left[-2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)k^2 g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2 \right] \left[\frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} k_\mu k_\nu \left[\left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) 2x(1-x) \right] \\ &\quad + \frac{i}{16\pi^2} g_{\mu\nu} k^2 \left[\Delta_\epsilon \left(x(1-x) + x(1-x) \right) + \ln \frac{C}{\mu^2} \left(-x(1-x) - x(1-x) \right) \right. \\ &\quad \quad \left. + x(1-x) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{i}{16\pi^2} g_{\mu\nu} m^2 \left[\Delta_\epsilon (-1+1) + \ln \frac{C}{\mu^2} (1-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right]\end{aligned}\quad (6.32)$$

e finalmente

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) 2x(1-x)\quad (6.33)$$

usando agora a Eq. (6.7) obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu} &= -4e^2 \frac{1}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \int_0^1 dx 2x(1-x) \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) \\ &= - (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2, \epsilon)\end{aligned}\quad (6.34)$$

onde definimos

$$\Pi(k^2, \epsilon) \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right]\quad (6.35)$$

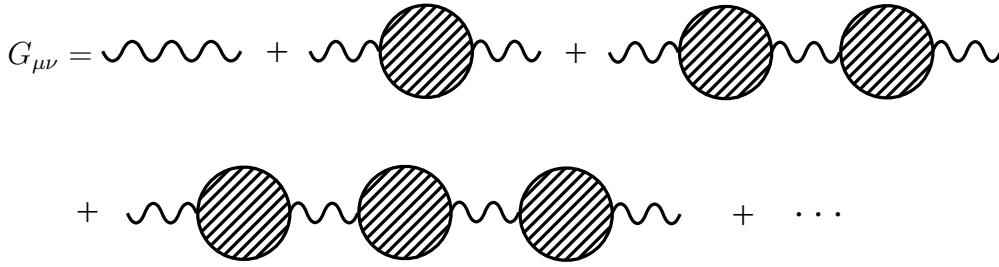


Figura 6.3:

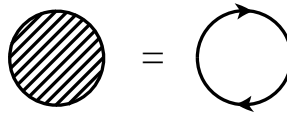


Figura 6.4:

Esta expressão claramente que diverge quando $\epsilon \rightarrow 0$. Antes de mostrar como fazer sentido deste resultado vamos primeiro discutir o significado de $\Pi_{\mu\nu}(k)$. O propagador completo do fóton é dado pela série representada na Fig. 6.3, onde

$$\text{shaded circle} \equiv i \Pi_{\mu\nu}(k) = \text{soma de todos os diagramas irreduzíveis de uma partícula em todas as ordens} \quad (6.36)$$

Em ordem mais baixa temos a contribuição representada na Fig. 6.4, que acabámos de calcular. Para continuar é conveniente reescrever o propagador livre do fóton (numa gauge arbitrária ξ) na forma,

$$\begin{aligned} iG_{\mu\nu}^0 &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \\ &\equiv iG_{\mu\nu}^{0T} + iG_{\mu\nu}^{0L} \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde introduzimos o projector transversal $P_{\mu\nu}^T$ definido por

$$P_{\mu\nu}^T = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (6.38)$$

e satisfazendo as relações,

$$\begin{cases} k^\mu P_{\mu\nu}^T = 0 \\ P_{\mu}^{T\nu} P_{\nu\rho}^T = P_{\mu\rho}^T \end{cases} \quad (6.39)$$

O propagador completo também pode em geral ser escrito separando as suas partes transversal e longitudinal

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^T + G_{\mu\nu}^L \quad (6.40)$$

onde $G_{\mu\nu}^T$ satisfaz

$$G_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T G_{\mu\nu} \quad (6.41)$$

Obtivemos, em primeira ordem, que o tensor da polarização do vácuo é transversal, isto é,

$$i \Pi_{\mu\nu}(k) = -ik^2 P_{\mu\nu}^T \Pi(k) \quad (6.42)$$

Este resultado é de facto válido em todas as ordens de teoria de perturbações, uma consequência da simetria de gauge e das identidades de Ward-Takahashi[28, 29]. Isto significa que a parte longitudinal do propagador não é renormalizada.

$$G_{\mu\nu}^L = G_{\mu\nu}^{0L} \quad (6.43)$$

Para a parte transversal obtemos

$$\begin{aligned} iG_{\mu\nu}^T &= P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} + P_{\mu\mu'}^T \frac{1}{k^2} (-i)k^2 P^{T\mu'\nu'} \Pi(k) (-i)P_{\nu'\nu}^T \frac{1}{k^2} \\ &\quad + P_{\mu\rho}^T \frac{1}{k^2} (-i)k^2 P^{T\rho\lambda} \Pi(k) (-i)P_{\lambda\tau}^T \frac{1}{k^2} (-i)k^2 P^{T\tau\sigma} \Pi(k) (-i)P_{\sigma\nu}^T \frac{1}{k^2} + \dots \\ &= P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} [1 - \Pi(k) + \Pi^2(k^2) + \dots] \end{aligned} \quad (6.44)$$

o que dá, depois de somar a série geométrica,

$$iG_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2 [1 + \Pi(k)]} \quad (6.45)$$

Tudo o que fizemos até este ponto é formal porque a função $\Pi(k)$ diverge. A maneira mais satisfatória de resolver este problema é a seguinte. O Lagrangeano inicial, foi obtido da teoria clássica e nada nos diz que deva ser exactamente o mesmo na teoria quântica. De facto, como acabámos de ver, a normalização das funções de onda muda quando calculamos correções a *one-loop*, e o mesmo acontece com os parâmetros físicos da teoria, a carga e a massa. Podemos portanto pensar que o Lagrangeano correcto é obtido adicionando correções quânticas ao Lagrangeano clássico, ordem a ordem em teoria de perturbações, para conservar as definições da carga, da massa e a normalização das funções de onda. Os termos que adicionamos ao Lagrangeano clássico são chamados *contraterms*³ O Lagrangeano total é então

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}(e, m, \dots) + \Delta\mathcal{L} \quad (6.46)$$

³Esta interpretação em termos de correções quânticas faz sentido. De facto podemos mostrar que a expansão em potências da constante de acoplamento pode ser interpretada como uma expansão em \hbar^L onde L é o número de loops na expansão.

Os contratermos são definidos a partir de condições de normalização que temos de impor nos campos e outros parâmetros da teoria. Em QED temos ao nosso dispor a normalização dos campos do fóton e electrão, a carga eléctrica e a massa do electrão. As condições de normalização são, em grande medida, arbitrárias. É contudo conveniente manter as expressões tão próximo quanto possível do caso livre, isto é, sem correcções radiativas. Definimos portanto a normalização do campo do fóton como,

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^2 i G_{\mu\nu}^{RT} = 1 \cdot P_{\mu\nu}^T \quad (6.47)$$

onde $G_{\mu\nu}^{RT}$ é a parte transversal do propagador renormalizado, obtido a partir do Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{total}}$. A justificação para esta definição vem do argumento seguinte. Consideremos a difusão de Coulomb em todas as ordens de teoria de perturbações. Temos então a situação descrita na Fig. 6.5. Usando as identidades de Ward-Takahashi

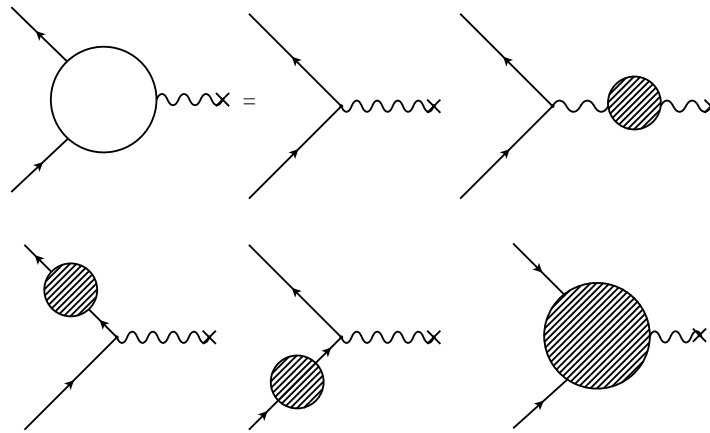


Figura 6.5:

podemos mostrar que os últimos três diagramas se anulam. Então a condição de normalização Eq. (6.47), significa que temos a situação descrita na Fig. 6.6, isto é, o valor experimental da carga do electrão é determinado no limite $q \rightarrow 0$ da difusão de Coulomb.

O Lagrangeano de contratermos tem que ter a mesma forma do Lagrangeano clássico para respeitar as simetrias da teoria. Para o campo do fóton é tradicional escrever

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\delta Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.48)$$

correspondendo à regra de Feynman

$$\mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu \quad - i \delta Z_3 k^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (6.49)$$

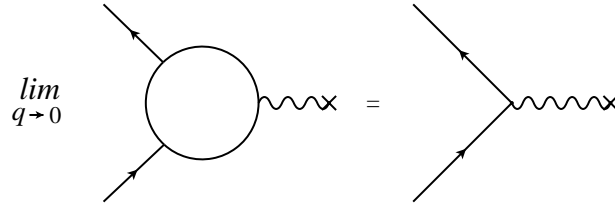


Figura 6.6:

Temos então

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu} &= i\Pi_{\mu\nu}^{loop} - i\delta Z_3 k^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\ &= -i \left(\Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3 \right) P_{\mu\nu}^T \end{aligned} \quad (6.50)$$

Devemos portanto de fazer a substituição

$$\Pi(k, \epsilon) \rightarrow \Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3 \quad (6.51)$$

no propagador do fóton. Obtemos,

$$iG_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3} \quad (6.52)$$

Da condição de normalização, Eq. (6.47), resulta

$$\Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3 = 0 \quad (6.53)$$

o que nos permite determinar a constante δZ_3 . Obtemos

$$\begin{aligned} \delta Z_3 &= -\Pi(0, \epsilon) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (6.54)$$

O propagador renormalizada do fóton pode-se então escrever ⁴

$$iG_{\mu\nu}(k) = \frac{P_{\mu\nu}^T}{k^2 [1 + \Pi(k, \epsilon) - \Pi(0, \epsilon)]} + iG_{\mu\nu}^L \quad (6.55)$$

As correções radiativas *finitas* são portanto dadas por

$$\Pi^R(k^2) \equiv \Pi(k^2, \epsilon) - \Pi(0, \epsilon)$$

⁴Notar que a massa nula do fóton não é renormalizada, isto é, o pólo do propagador do fóton continua a ser para $k^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2} \right] \\
&= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \cot^{-1} \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} \quad (6.56)
\end{aligned}$$

onde a última equação é válida para $k^2 < 4m^2$. Para valores $k^2 \ll m^2$ obtemos

$$\Pi^R(k^2) = \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} \quad (6.57)$$

Para valores $k^2 > 4m^2$ o resultado para $\Pi^R(k^2)$ pode ser obtido da Eq. (6.56) por continuação analítica. Usando ($k^2 > 4m^2$)

$$\cot^{-1} iz = i \left(-\tanh^{-1} z + \frac{i\pi}{2} \right) \quad (6.58)$$

e

$$\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow i \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \quad (6.59)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi^R(k^2) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \tanh^{-1} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2} \right)^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right] \right\} \quad (6.60)
\end{aligned} \quad (6.61)$$

A parte imaginária de Π^R é dada por

$$Im \Pi^R(k^2) = \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta \left(1 - \frac{4m^2}{k^2} \right) \quad (6.62)$$

e está relacionada com a produção de pares electrão-positrão⁵.

Para referência futura vamos considerar o caso em que $k^2 < 0$, o que acontece quando o fóton é trocado no canal t . Este caso faz-se mais facilmente regressando à expressão inicial da Eq. (6.56) e fazendo a identificação

$$k^2 \equiv -Q^2, \quad \sinh^2 \varphi = \frac{Q^2}{4m^2} \quad (6.63)$$

Obtemos então

$$\Pi^R(-Q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 + x(1-x)4 \sinh^2 \varphi \right]$$

⁵Para $k^2 > 4m^2$ há a possibilidade de produzir um par e^+e^- . Assim ao processo virtual sobrepõe-se um processo real.

$$= -\frac{\alpha}{\pi} \left[\left(1 - \frac{\coth^2 \varphi}{3} \right) (\varphi \coth \varphi - 1) + \frac{1}{9} \right] \quad (6.64)$$

Para o caso de $Q^2 \gg m^2$ a expressão simplifica-se e obtemos

$$\Pi^R(-Q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right]. \quad (6.65)$$

6.1.2 Self-energy do electrão

O propagador completo do electrão é dado pela série diagramática da Fig. 6.7, que se pode escrever na forma,

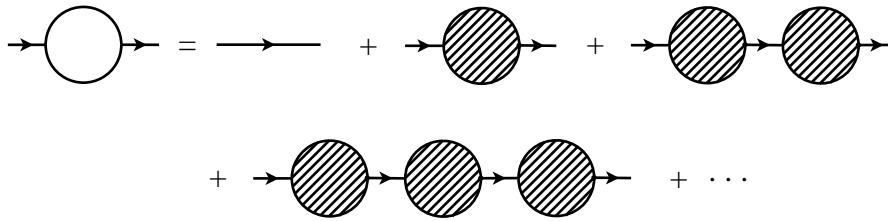


Figura 6.7:

$$\begin{aligned} S(p) &= S^0(p) + S^0(p) \left(-i \Sigma(p) \right) S^0(p) + \dots \\ &= S^0(p) \left[1 - i \Sigma(p) S(p) \right] \end{aligned} \quad (6.66)$$

onde identificámos

$$\text{Círculo hachurado} \equiv -i \Sigma(p) \quad (6.67)$$

Multiplicando à esquerda por $S_0^{-1}(p)$ e à direita por $S^{-1}(p)$ obtemos

$$S_0^{-1}(p) = S^{-1}(p) - i \Sigma(p) \quad (6.68)$$

que podemos reescrever como

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + i \Sigma(p) \quad (6.69)$$

Usando as expressões para o propagador livre,

$$S_0(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \implies S_0^{-1}(p) = -i(\not{p} - m) \quad (6.70)$$

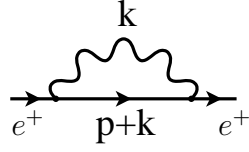


Figura 6.8:

podemos escrever

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= S_0^{-1}(p) + i\Sigma(p) \\ &= -i \left[\not{p} - (m + \Sigma(p)) \right] \end{aligned} \quad (6.71)$$

Concluimos assim que é suficiente calcular $\Sigma(p)$ em todas as ordens de teoria de perturbações para obter o propagador completo do electrão. O nome de *self-energy* dado o $\Sigma(p)$ vem do facto que, como pode ser visto na Eq. (6.71), aparecer como uma contribuição adicional (dependente do momento) à massa do electrão.

Em ordem mais baixa o único diagrama contribuindo para $\Sigma(p)$ é o da Fig. 6.8 e obtemos,

$$-i\Sigma(p) = (+ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \quad (6.72)$$

onde escolhemos a gauge de Feynman ($\xi = 1$) para o propagador do fotão e introduzimos uma massa pequena para o fotão λ , para podermos controlar a divergência infravermelha (IR) que aparece quando $k^2 \rightarrow 0$ (ver mais abaixo). Usando regularização dimensional e os resultados da álgebra de Dirac em dimensão d ,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(\not{p} + \not{k})\gamma^\mu &= -(\not{p} + \not{k})\gamma_\mu\gamma^\mu + 2(\not{p} + \not{k}) = -(d-2)(\not{p} + \not{k}) \\ m\gamma_\mu\gamma^\mu &= md \end{aligned} \quad (6.73)$$

obtemos

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= -\mu^\epsilon e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + \varepsilon} \gamma_\mu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \\ &= -\mu^\epsilon e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + md}{[k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &= -\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + md}{[(k^2 - \lambda^2)(1-x) + x(p+k)^2 - xm^2 + i\varepsilon]^2} \\ &= -\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + md}{[(k+px)^2 + p^2x(1-x) - \lambda^2(1-x) - xm^2 + i\varepsilon]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)[\not{p}(1-x) + \not{k}] + m d}{[k^2 + p^2 x(1-x) - \lambda^2(1-x) - x m^2 + i\epsilon]^2} \\
&= -\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \left[-(d-2)\not{p}(1-x) + m d \right] I_{0,2}
\end{aligned} \tag{6.74}$$

onde⁶

$$I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta_\epsilon - \ln \left[-p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x) \right] \right] \tag{6.75}$$

A contribuição do *loop* na Fig. 6.8 para a *self-energy* do electrão $\Sigma(p)$ pode ser escrita na forma

$$\Sigma(p)^{loop} = A(p^2) + B(p^2) \not{p} \tag{6.76}$$

com

$$\begin{aligned}
A &= e^2 \mu^\epsilon (4 - \epsilon) m \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\Delta_\epsilon - \ln \left[-p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x) \right] \right] \\
B &= -e^2 \mu^\epsilon (2 - \epsilon) \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \left[\Delta_\epsilon \right. \\
&\quad \left. - \ln \left[-p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x) \right] \right]
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Usando agora as expansões

$$\begin{aligned}
\mu^\epsilon (4 - \epsilon) &= 4 \left[1 + \epsilon \left(\ln \mu - \frac{1}{4} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \\
\mu^\epsilon (4 - \epsilon) \Delta_\epsilon &= 4 \left[\Delta_\epsilon + 2 \left(\ln \mu - \frac{1}{4} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\
\mu^\epsilon (2 - \epsilon) &= 2 \left[1 + \epsilon \left(\ln \mu - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \\
\mu^\epsilon (2 - \epsilon) \Delta_\epsilon &= 2 \left[\Delta_\epsilon + 2 \left(\ln \mu - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]
\end{aligned} \tag{6.78}$$

podemos finalmente escrever,

$$A(p^2) = \frac{4e^2 m}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \ln \left[\frac{-p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x)}{\mu^2} \right] \right] \tag{6.79}$$

e

$$B(p^2) = -\frac{2e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \left[\Delta_\epsilon - 1 - \ln \left[\frac{-p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x)}{\mu^2} \right] \right] \tag{6.80}$$

⁶O termo linear em k anula-se.

Para continuar com o programa da renormalização temos que introduzir o Lagrangeano de contratermos e definir as condições de normalização. Temos

$$\Delta\mathcal{L} = i(Z_2 - 1)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (Z_2 - 1)m\bar{\psi}\psi + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi + (Z_1 - 1)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (6.81)$$

e obtemos para a *self-energy*

$$-i\Sigma(p) = -i\Sigma^{loop}(p) + i(\not{p} - m)\delta Z_2 + i\delta m \quad (6.82)$$

Contrariamente ao caso do fóton, vemos que temos duas constantes a determinar. No caso da renormalização *on-shell* que é normalmente usado em QED as duas constantes são obtidas exigindo que o pólo do propagador corresponda à massa física (daí o nome de renormalização *on-shell*), e que o resíduo do pólo tenha o mesmo valor que o propagador livre. Isto quer dizer

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p} = m) = 0 &\rightarrow \delta m = \Sigma^{loop}(\not{p} = m) \\ \frac{\partial\Sigma}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} = 0 &\rightarrow \delta Z_2 = \frac{\partial\Sigma^{loop}}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} \end{aligned} \quad (6.83)$$

Obtemos então para δm ,

$$\begin{aligned} \delta m &= A(m^2) + mB(m^2) \\ &= \frac{2me^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \left[2\Delta_\epsilon - 1 - 2\ln\left(\frac{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)}{\mu^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - (1-x) \left[\Delta_\epsilon - 1 - \ln\left(\frac{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)}{\mu^2}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{2me^2}{16\pi^2} \left[\frac{3}{2}\Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx (1+x) \ln\left(\frac{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)}{\mu^2}\right) \right] \\ &= \frac{3\alpha m}{4\pi} \left[\Delta_\epsilon - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 dx (1+x) \ln\left(\frac{m^2x^2}{\mu^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.84)$$

onde no último passo na Eq. (6.84) tomámos o limite $\lambda \rightarrow 0$ porque o integral não é divergente⁷. Dum modo semelhante obtemos para δZ_2 ,

$$\delta Z_2 = \frac{\partial\Sigma^{loop}}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} = \frac{\partial A}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} + B + m \frac{\partial B}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} \quad (6.85)$$

onde

$$\frac{\partial A}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m} = \frac{4e^2m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2(1-x)x}{-m^2x(1-x) + m^2x + \lambda^2(1-x)}$$

⁷ δm não é divergente IR.

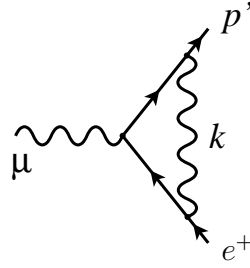


Figura 6.9: Contribuição a *one-loop* para o vértice.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\alpha m^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{(1-x)x}{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)} \\
 B &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left[\Delta_\epsilon - 1 - \ln \left(\frac{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)}{\mu^2} \right) \right] \\
 m \frac{\partial B}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} &= -\frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)^2}{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)} \quad (6.86)
 \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (6.86) na Eq. (6.85) obtemos,

$$\begin{aligned}
 \delta Z_2 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{m^2x^2}{\mu^2} \right) - 2 \int_0^1 dx \frac{(1+x)(1-x)xm^2}{m^2x^2 + \lambda^2(1-x)} \right] \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[-\Delta_\epsilon - 4 + \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] \quad (6.87)
 \end{aligned}$$

onde tomamos o limite $\lambda \rightarrow 0$ em todos os casos em que foi possível. É claro que o resultado final na Eq. (6.87) diverge nesse limite, implicando que Z_2 é divergente IR. Isto não é um problema para a teoria pois δZ_2 não é um parâmetro físico da teoria. Veremos na secção 6.3.4 que as divergências infravermelhas cancelam para processos reais. Se tivéssemos considerado uma gauge geral ($\xi \neq 1$), teríamos descoberto que δm não viria diferente mas que Z_2 mudaria mostrando uma dependência na gauge. Novamente, em processos físicos, esta dependência terá que cancelar no final.

6.1.3 O vértice

O diagrama contribuindo para o vértice de QED a *one-loop* está indicado na Fig. 6.9. Na gauge de Feynman ($\xi = 1$) dá a contribuição

$$\begin{aligned}
 ie \mu^{\epsilon/2} \Lambda_\mu^{loop}(p', p) &= (ie \mu^{\epsilon/2})^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (-i) \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \gamma^\sigma \frac{i[(\not{p}' + \not{k}) + m]}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i[(\not{p} + \not{k}) + m]}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\rho \quad (6.88)
 \end{aligned}$$

onde Λ_μ está relacionado com o vértice total Γ_μ através da relação

$$\begin{aligned} i\Gamma_\mu &= ie(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{loop} + \gamma_\mu \delta Z_1) \\ &= ie(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^R) \end{aligned} \quad (6.89)$$

O integral que define $\Lambda_\mu^{loop}(p', p)$ é divergente. Como anteriormente esperamos resolver este problema introduzindo contratermos e condições de normalização. O contratermo tem a mesma forma do vértice e já foi incluído na Eq. (6.89). A constante de renormalização é determinada exigindo que no limite $q = p' - p \rightarrow 0$ o vértice reproduza o resultado de ordem mais baixa (*tree-level*), porque assim sere-mos consistentes com a definição da carga eléctrica no limite $q \rightarrow 0$ da difusão de Coulomb. Além disso, esta normalização deve ser feita para electrões *on-shell*. A normalização deve ser então,

$$\bar{u}(p) \left(\Lambda_\mu^{loop} + \gamma_\mu \delta Z_1 \right) u(p) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (6.90)$$

Se estivermos somente interessados em calcular δZ_1 e mostrar que as divergências podem ser removidas com a normalização escolhida, então o problema é mais simples e pode ser feito de duas maneiras.

1º método

Usamos o facto de que δZ_1 é para ser calculado *on-shell* e para $p = p'$. Então

$$i\Lambda_\mu^{loop}(p, p) = e^2 \mu^\epsilon \int \frac{dk^d}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \quad (6.91)$$

Notemos que se tem

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \quad (6.92)$$

e portanto

$$i\Lambda_\mu^{loop}(p, p) = -e^2 \mu^\epsilon \frac{\partial}{\partial p^\mu} \int \frac{dk^d}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma_\rho \frac{\not{p} + \not{k} + m\epsilon}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\rho \quad (6.93)$$

$$= -i \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{loop}(p) \quad (6.94)$$

Concluimos então que $\Lambda_\mu^{loop}(p, p)$ está relacionado com a *self-energy* do electrão⁸,

$$\Lambda_\mu^{loop}(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{loop} \quad (6.95)$$

⁸Este resultado é uma das formas da identidade de Ward-Takahashi.

Para as condições *on-shell* obtemos

$$\Lambda_\mu^{loop}(p, p) \Big|_{\not{p}=m} = - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Big|_{\not{p}=m} = -\delta Z_2 \gamma_\mu \quad (6.96)$$

e a condição de normalização, Eq. (6.90), dá

$$\delta Z_1 = \delta Z_2 \quad (6.97)$$

Como já calculámos δZ_2 na Eq. (6.87), então δZ_1 está determinado.

2º método

Neste segundo método não usamos a identidade de Ward mas calculamos directamente os integrais para o vértice na Eq. (6.88). Por enquanto não pomos $p' = p$ mas admitimos que os factores de forma do vértice são para ser calculados entre spinores *on-shell*. Obtemos

$$\begin{aligned} i \bar{u}(p') \Lambda_\mu^{loop} u(p) &= e^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\bar{u}(p) \gamma_\rho [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma_\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma^\rho u(p)}{D_0 D_1 D_2} \\ &= e^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_\mu}{D_0 D_1 D_2} \end{aligned} \quad (6.98)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\mu &= \bar{u}(p) \left[(-2 + d) k^2 \gamma_\mu + 4p \cdot p' \gamma_\mu + 4(p + p') \cdot k \gamma_\mu + 4m k_\mu \right. \\ &\quad \left. - 4\not{k} (p + p')_\mu + 2(2 - d) \not{k} k_\mu \right] u(p) \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$D_0 = k^2 - \lambda^2 + i\epsilon \quad (6.100)$$

$$D_1 = (k + p')^2 - m^2 + i\epsilon \quad (6.101)$$

$$D_2 = (k + p)^2 - m^2 + i\epsilon \quad (6.102)$$

Usando agora os resultados da secção A.5.3 com

$$r_1^\mu = p'^\mu \quad ; \quad r_2^\mu = p^\mu \quad (6.103)$$

$$P^\mu = x_1 p'^\mu + x_2 p^\mu \quad (6.104)$$

$$C = (x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 + (1 - x_1 - x_2) \lambda^2 \quad (6.105)$$

onde

$$q = p' - p \quad (6.106)$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
i \bar{u}(p') \Lambda_\mu^{loop} u(p) &= i \frac{\alpha}{4\pi} \Gamma(3) \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{1}{2C} \\
&\left\{ \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \left[-(-2+d)(x_1^2 m^2 + x_2^2 m^2 + 2x_1 x_2 p' \cdot p) - 4p' \cdot p \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4(p+p') \cdot (x_1 p' + x_2 p) + \frac{(2-d)^2}{2} C \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \bar{u}(p) u(p) m \left[4(x_1 p' + x_2 p)_\mu - 4(p'+p)_\mu (x_1 + x_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(2-d)(x_1 + x_2)(x_1 p' + x_2 p)_\mu \right] \right\} \quad (6.107)
\end{aligned}$$

$$= i \bar{u}(p) \left[G(q^2) \gamma_\mu + H(q^2) (p+p') \right] u(p) \quad (6.108)$$

onde definimos⁹,

$$\begin{aligned}
G(q^2) &\equiv \frac{\alpha}{4\pi} \left[\Delta_\epsilon - 2 - 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ln \frac{(x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 + (1 - x_1 - x_2) \lambda^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \left(\frac{-2(x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 - 4m^2 + 2q^2}{(x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 + (1 - x_1 - x_2) \lambda^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(x_1 + x_2)(4m^2 - q^2)}{(x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 + (1 - x_1 - x_2) \lambda^2} \right) \right] \quad (6.109)
\end{aligned}$$

$$H(q^2) \equiv \frac{\alpha}{4\pi} \left[\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{-2m(x_1 + x_2) + 2m(x_1 + x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2 m^2 - x_1 x_2 q^2 + (1 - x_1 - x_2) \lambda^2} \right] \quad (6.110)$$

Agora, usando a definição da Eq. (6.89), obtemos para o vértice renormalizado,

$$\bar{u}(p') \Lambda_\mu^R(p', p) u(p) = \bar{u}(p') \left[\left(G(q^2) + \delta Z_1 \right) \gamma_\mu + H(q^2) (p+p')_\mu \right] u(p) \quad (6.111)$$

Como δZ_1 é calculado no limite $q = p' - p \rightarrow 0$ é conveniente usar a identidade de Gordon para eliminar o termo $(p' + p)^\mu$. Obtemos então

$$\bar{u}(p') (p' + p)_\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[2m \gamma_\mu - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p) \quad (6.112)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \Lambda_\mu^R(p', p) u(p) &= \bar{u}(p') \left[\left(G(q^2) + 2m H(q^2) + \delta Z_1 \right) \gamma_\mu - i H(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p) \\
&= \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad (6.113)
\end{aligned}$$

⁹Para obter a Eq. (6.110) temos que mostrar que a simetria dos integrais em $x_1 \leftrightarrow x_2$ implica que o coeficiente de p é igual ao coeficiente de p' .

onde introduzimos a notação usual para os factores de forma do vértice.

$$F_1(q^2) \equiv G(q^2) + 2mH(q^2) + \delta Z_1 \quad (6.114)$$

$$F_2(q^2) \equiv -2mH(q^2) \quad (6.115)$$

A condição de normalização da Eq. (6.90) implica que $F_1(0) = 0$, ou seja,

$$\delta Z_1 = -G(0) - 2mH(0) \quad (6.116)$$

Temos portanto que calcular $G(0)$ e $H(0)$. Neste limite os integrais das Eqs. (6.109) e (6.110) são muito mais simples. Obtemos (mudamos de variável $x_1 + x_2 \rightarrow y$),

$$G(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\Delta_\epsilon - 2 - 2 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \ln \frac{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2}{\mu^2} + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \frac{-2y^2 m^2 - 4m^2 + 8ym^2}{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2} \right] \quad (6.117)$$

$$H(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \frac{-2m y + 2m y^2}{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2} \quad (6.118)$$

Usando agora

$$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \ln \frac{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2}{\mu^2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) \quad (6.119)$$

$$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \frac{-2y^2 m^2 - 4m^2 + 8ym^2}{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2} = 7 + 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \quad (6.120)$$

$$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dy \frac{-2m y + 2m y^2}{y^2 m^2 + (1-y)\lambda^2} = -\frac{1}{m} \quad (6.121)$$

(onde tomámos o limite $\lambda \rightarrow 0$ sempre que possível) obtemos,

$$G(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\Delta_\epsilon + 6 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] \quad (6.122)$$

$$H(0) = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{m} \quad (6.123)$$

Substituindo as expressões anteriores na Eq. (6.116) obtemos finalmente,

$$\delta Z_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[-\Delta_\epsilon - 4 + \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] \quad (6.124)$$

em acordo com a Eq. (6.87) e a Eq. (6.97). A forma geral dos factores de forma $F_i(q^2)$, para $q^2 \neq 0$, é bastante complicada. Aqui damos o resultado somente para o caso $q^2 < 0$ (ver Ref. [27] para o caso geral),

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left(2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 4 \right) (\theta \coth \theta - 1) - \theta \tanh \frac{\theta}{2} - 8 \coth \theta \int_0^{\theta/2} \beta \tanh \beta d\beta \right\}$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\sinh \theta} \quad (6.125)$$

onde

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{q^2}{4m^2}. \quad (6.126)$$

No limite em que o momento transferido é nulo ($q = p' - p = 0$) obtemos

$$\begin{cases} F_1(0) = 0 \\ F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases} \quad (6.127)$$

um resultado que usaremos na secção 6.3.3 quando discutirmos o momento magnético anómalo do electrão.

6.2 Contratermos e contagem de potências

Tudo aquilo que vimos nas secções anteriores pode ser interpretado do modo seguinte. O Lagrangeana inicial $\mathcal{L}(e, m, \dots)$ foi obtido a partir duma correspondência entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. É então natural que seja modificado por correcções quânticas sendo o Lagrangeana total dado então por

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}(e, m, \dots) + \Delta\mathcal{L} \quad (6.128)$$

e

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^{[1]} + \Delta\mathcal{L}^{[2]} + \dots \quad (6.129)$$

onde $\Delta\mathcal{L}^{[i]}$ é a correcção correspondendo a “ i – loops” ou, o que é o mesmo, à ordem \hbar^i pois uma contagem em termos de \hbar é o mesmo que uma contagem em termos de *loops*¹⁰. Esta interpretação é bastante atraente porque no limite $\hbar \rightarrow 0$ o Lagrangeana se reduz ao clássico. Com o Lagrangeana \mathcal{L}_{tot} podemos então obter resultados *finitos*, embora \mathcal{L}_{tot} ele mesmo seja infinito por causa dos termos em $\Delta\mathcal{L}$.

Dentro desta linguagem os resultados até à ordem \hbar podem ser escritos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e, m, \dots) = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}A^\mu A_\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \\ & + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi \end{aligned} \quad (6.130)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}^{(1)} = & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (Z_2 - 1)(i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi) \\ & + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - e(Z_1 - 1)\bar{\psi}\not{A}\psi \end{aligned} \quad (6.131)$$

¹⁰ $\hbar^{E-1+L} = \hbar^{\frac{E}{2} + \frac{V}{2}}$. Notar que são válidas as seguintes relações $L = I - V + 1$; $3V = E + 2I$.

O Lagrangeana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{tot} = & -\frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \\
& + Z_2(i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi + \delta m\bar{\psi}\psi) \\
& - eZ_1\bar{\psi}\not{A}\psi
\end{aligned} \tag{6.132}$$

produzirá funções de Green renormalizadas e finitas até à ordem \hbar .

De facto só mostrámos que as funções de Green de 2 pernas exteriores (propagadores) e de 3 pernas exteriores (vértice) eram finitas. É importante verificarmos se todas as outras funções de Green, com um número arbitrário de pernas exteriores, são finitas pois já esgotámos toda a nossa liberdade ao escolhermos a massa, a constante de acoplamento e os resíduos dos pólos. Isto leva-nos à chamada *contagem de potências*.

Consideremos um diagrama de Feynman G com L loops, I_B linhas internas de Bosões e I_F linhas internas de Fermiões. Se houver vértices com derivadas, δ_v é o número de derivadas no vértice v . Define-se então o grau superficial de divergência (notar que $L = I_B + I_F + 1 - V$)

$$\begin{aligned}
\omega(G) &= 4L + \sum_v \delta_v - I_F - 2I_B \\
&= 4 + 3I_F + 2I_B + \sum_v (\delta_v - 4)
\end{aligned} \tag{6.133}$$

Para grandes valores do momento o diagrama divergirá com

$$\Lambda^\omega(G) \quad \text{se} \quad \omega(G) > 0 \tag{6.134}$$

e com

$$\ln \Lambda \quad \text{se} \quad \omega(G) = 0 \tag{6.135}$$

onde Λ é um *cutoff*. Os diversos termos têm a origem seguinte:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (\text{por loop}) &\rightarrow 4L \\
\partial_\mu \Leftrightarrow k_\mu &\rightarrow \delta_v \\
\frac{i}{\not{q} - m} &\rightarrow -I_F \\
\frac{i}{q^2 - m^2} &\rightarrow -2I_B
\end{aligned} \tag{6.136}$$

A expressão para $\omega(G)$ é mais útil quando expressa em termos do número de linhas externas e da dimensionalidade dos vértices da teoria. Seja ω_v a dimensão, em termos de massa, do vértice v , isto é

$$\omega_v = \delta_v + \#\text{campos bosónicos} + \frac{3}{2}\#\text{campos fermiónicos} \quad (6.137)$$

Então, se designarmos por $f_v(b_v)$ o número de linhas internas fermiônicas (bosônicas) que vão dar ao vértice v , podemos escrever

$$\sum_v \omega_v = \sum_v (\delta_v + \frac{3}{2}f_v + b_v) + \frac{3}{2}E_F + E_B \quad (6.138)$$

onde $E_F(E_B)$ são o número de linhas *externas* fermiônicas (bosônicas). Atendendo a que temos

$$\begin{aligned} I_F &= \frac{1}{2} \sum_v f_v \\ I_B &= \frac{1}{2} \sum_v b_v \end{aligned} \quad (6.139)$$

obtemos

$$\sum_v \omega_v = \sum_v \delta_v + 3I_F + 2I_B + \frac{3}{2}E_F + E_B \quad (6.140)$$

Substituindo na expressão para $\omega(G)$ obtemos finalmente

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B + \sum_v (\omega_v - 4) \quad (6.141)$$

Se $[g_v]$ for a dimensão em termos de massa da constante de acoplamento do vértice v , então

$$\omega_v + [g_v] = 4 \quad (6.142)$$

De acordo com a expressão anterior para o grau superficial de divergência classificamos as teorias em três classes

i) *Teorias não renormalizáveis*

Contém pelo menos um vértice com $\omega_v > 4$. O grau superficial de divergência aumenta com o número de vértices, isto é com a ordem das teorias de perturbações. Para uma ordem suficientemente grande \forall função de Green diverge.

ii) *Teorias renormalizáveis*

Todos os vértices têm $\omega_v \leq 4$ e pelo menos um tem $\omega_v = 4$. Se todos os vértices tiverem $\omega_v = 4$ então

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \quad (6.143)$$

e todos os diagramas contribuindo para uma dada função de Green têm o mesmo grau de divergência. Somente um número *finito* de *funções de Green* são divergentes.

iii) *Teorias super-renormalizáveis*

Todos os vértices têm $\omega_v < 4$. Somente um número *finito* de *diagramas* é divergente ¹¹.

Voltando ao nosso problema de saber quais os diagramas divergentes em QED, podemos fazer a tabela seguinte.

E_F	E_B	$\omega(G)$	Grau efectivo de divergencia
0	2	2	0 (cons. de corrente)
0	3		0 (T. de Furry)
0	4	0	Convergente
2	0	1	0 (cons. de corrente)
2	1	0	0

Tabela 6.1

Todos os outros diagramas são superficialmente convergentes. Como veremos o grau efectivo de divergência é reduzido em virtude das identidades de Ward ou seja de conservação de corrente.

Esta análise mostra que até à ordem \hbar o Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tot} = & -\frac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \\ & + Z_2(i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi + \delta m\bar{\psi}\psi) \\ & - eZ_1\bar{\psi}\not{A}\psi \end{aligned} \quad (6.144)$$

¹¹O grau efectivo de divergência é por vezes inferior ao grau superficial, quando devido a simetrias da teoria algumas potências do momento exterior podem ser factorizadas. É o que acontece com a polarização do vácuo em QED.

produz funções de Green finitas e renormalizadas com um número arbitrário de pernas. Resta mostrar, o que não faremos aqui, que o Lagrangeana anterior continua a ser válido numa ordem qualquer com a mesma forma, com a única diferença que as constantes Z_1, Z_2, Z_3 e δm serão dados por séries, p.e.

$$Z_1 = Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots \quad (6.145)$$

O Lagrangeano anterior permite uma outra interpretação que por vezes também é útil. Os campos $A, \bar{\psi}$ e ψ são os campos renormalizados que produzem resíduos iguais a 1 nos pólos dos propagadores, e as constantes m, e são a massa e a carga físicas. Definamos os campos não renormalizados $\psi_0, \bar{\psi}_0$ e A_0 e os parâmetros despidos (dependentes do cutoff) μ_0^2, m_0 e de acordo com

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{Z_2} \psi & m_0 &= m - \delta m \\ \bar{\psi}_0 &= \sqrt{Z_2} \bar{\psi} & \mu_0^2 &= Z_3^{-1} \mu^2 \\ A_0 &= \sqrt{Z_3} A & e_0 &= Z_1 Z_2^{-1} \sqrt{Z_3^{-1}} e = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} e \\ \xi_0 &= Z_3 \xi \end{aligned} \quad (6.146)$$

Então o Lagrangeana em termos das quantidades despidas é idêntico ao Lagrangeana original¹²

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu_0 A_{0\mu} A_0^\mu - \frac{1}{2\xi_0} (\partial \cdot A_0)^2 \\ &\quad + i(\bar{\psi}_0 \not{\partial} \psi_0 - m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0) - e_0 \bar{\psi}_0 A_0 \psi_0 \end{aligned} \quad (6.147)$$

As funções de Green despidas estão relacionadas com as funções de Green renormalizadas por

$$\begin{aligned} G_0^{n,\ell}(p_1, \dots, p_{2n}, k_1, \dots, k_\ell, \mu_0, m_0, \ell_0, \xi_0, \Lambda) \\ = Z_2^n(\Lambda) Z_3^{\ell/2} G_R^{n,\ell}(p_1, \dots, p_{2n}, k_1, \dots, k_\ell, \mu, m, e, \xi) \end{aligned} \quad (6.148)$$

onde $p_1 \dots p_{2n}$ são os momentos dos fermiões e $k_1 \dots k_\ell$ os momentos dos bosões.

¹²Os termos $\frac{\mu^2}{2} A^2 = \frac{\mu_0^2}{2} A_0^2$ e $\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 = \frac{1}{2\xi_0} (\partial \cdot A_0)^2$ não são renormalizados. Isto é uma consequência das identidades de Ward-Takahashi. A identidade de Ward $Z_1 = Z_2$ é crucial para que $e_0 A_0 = e A$ dando um significado ao acoplamento mínimo independente da renormalização.

6.3 Consequências físicas da renormalização a *one-loop*

O procedimento de renormalização das secções anteriores pode parecer, à primeira vista, somente um artifício técnico para *esconder os infinitos*. Na verdade isso não é verdade, há realmente consequências físicas do processo de renormalização, que são observadas experimentalmente confirmando a validade do procedimento. Nesta secção vamos rever algumas delas em QED.

6.3.1 Variação da constante α com a escala de energia

Consideremos novamente a difusão de Coulomb descrita na Fig. 6.5. A identidade de Ward-Takahashi, $Z_1 = Z_2$, válida em todas as ordens de teoria de perturbações, assegura que a interacção electromagnética vem modificada da forma seguinte,

$$\frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{q^2 [1 + \Pi^R(q^2)]} \quad (6.149)$$

com a condição de normalização $\Pi^R(0) = 0$, que assegura a definição da carga eléctrica. Introduzindo $e^2 = 4\pi\alpha$ podemos interpretar a Eq. (6.149) dizendo que a carga eléctrica depende da escala da energia, isto é,

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 + \Pi^R(q^2)} \quad (6.150)$$

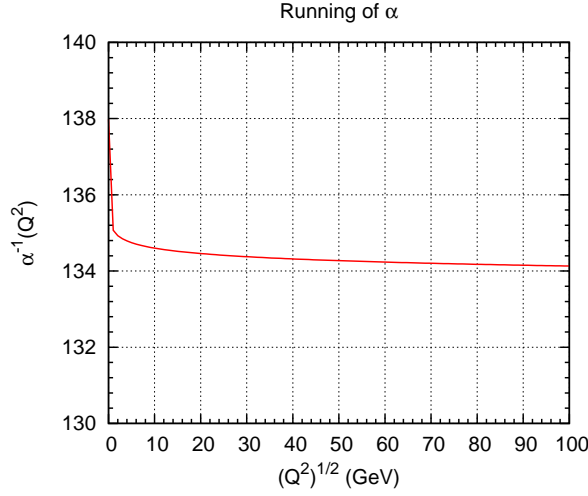
Para o caso em que $q^2 = -Q^2$, e em ordem mais baixa, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(Q^2) &= \alpha(0) [1 - \Pi^R(-Q^2)] \\ &= \alpha(0) + \frac{\alpha(0)^2}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right] \end{aligned} \quad (6.151)$$

onde se usou a Eq. (6.65). A variação do inverso de α com a energia está representada na Fig. 6.10. Vemos que α^{-1} passa do valor 137.36 para $Q^2 = 0$ para o valor 134.7 a $Q^2 = 91^2 \text{ GeV}^2$. Se tivéssemos incluído todas as correções no modelo standard o valor seria 128 à escala da massa de M_Z . Este efeito foi verificado experimentalmente na experiência LEP no CERN. Vemos assim que a constante efectiva aumenta com a energia. Esta é uma característica das teorias abelianas. As teorias não abelianas, como QCD podem apresentar o comportamento oposto, designado por liberdade assintótica, isto a constante de acoplamento decresce com o aumento da energia tornando possível os cálculos perturbativos nesse regime.

6.3.2 O desvio de Lamb

A diferença de energia entre os estados $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ no átomo de hidrogénio foi observada experimentalmente pela primeira vez por Lamb e Retherford[17]. É um

Figura 6.10: Variação de α^{-1} com a energia

problema muito complexo, pois há diversas correcções radiativas que contribuem. Aqui vamos só mostrar que uma delas é uma modificação do potencial de Coulomb devida à polarização do vácuo. Para $k^2 \ll m^2$ o propagador do fóton vem modificado para

$$\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \rightarrow \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} \right) \quad (6.152)$$

onde se usou o resultado da Eq. (6.57). Fazendo a transformada de Fourier inversa para obter o potencial de Coulomb modificado obtemos

$$V(r) = \frac{e}{4\pi r} + \frac{e\alpha}{15\pi m^2} \delta^3(x) \quad (6.153)$$

A presença da função delta vai só afectar os estados com $l = 0$ e portanto separar os estados $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Contudo este efeito não é suficiente para explicar o efeito. Para um tratamento completo ver o livro de Itzykson e Zuber [30].

6.3.3 Momento magnético anómalo do electrão

Vamos aqui ver como as correcções finitas produzem resultados verificados experimentalmente dando credibilidade a todo o programa de renormalização. Calculemos a correcção ao momento magnético anómalo do electrão. O momento magnético do electrão é dado por

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} g \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (6.154)$$

onde $e = -|e|$ para o electrão.

Um dos grandes triunfos da equação de Dirac foi prever o valor $g = 2$. Definamos a anomalia do momento magnético através da relação

$$g = 2(1 + a) \quad (6.155)$$

ou seja

$$a = \frac{g}{2} - 1 \quad (6.156)$$

Vamos calcular a anomalia a dada pela correção de 1 -loop. Vejamos primeiro de que forma é que apareceria um valor de $a \neq 0$ em mecânica quântica não relativista. A equação de Schrödinger para uma partícula num campo exterior é

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{2m}(1 + a)\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \varphi \quad (6.157)$$

Consideremos que o campo exterior é um campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Então conservando somente termos em primeira ordem em e obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} - e \frac{\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}}{2m} - \frac{e}{2m}(1 + a)\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &\equiv H_0 + H_{int} \end{aligned} \quad (6.158)$$

A amplitude de transição devida a H_{int} é ($\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$),

$$\begin{aligned} M = \langle p' | H_{int} | p \rangle &= -\frac{e}{2m} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \chi^\dagger e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \left[\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} + (1 + a)\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \chi \\ &= -\frac{e}{2m} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \chi^\dagger \left[(\vec{p}' + \vec{p})^k + i(1 + a)\sigma^i \epsilon^{ijk} q^j \right] A^k e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \chi \\ &= -\frac{e}{2m} \chi^\dagger \left[(p' + p)^k + i(1 + a)\sigma^i \epsilon^{ijk} q^j \right] A^k(q) \chi \end{aligned} \quad (6.159)$$

É este o resultado que queremos comparar com o limite não relativista da correção do vértice. A amplitude é dada por

$$\begin{aligned} M &= e \bar{u}(p') (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^R) u(p) A^\mu(q) \\ &= e \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu (1 + F_1(q^2)) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \right] u(p) A^\mu(q) \\ &= \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left\{ (p' + p)_\mu [1 + F_1(q^2)] + i \sigma_{\mu\nu} q^\nu [1 + F_1(q^2) + F_2(q')] \right\} u(p) A^\mu(q) \end{aligned} \quad (6.160)$$

onde se usou a identidade Gordon. Para um campo magnético externo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e no limite $q^2 \rightarrow 0$ a expressão anterior reduz-se a

$$M = \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left\{ (p' + p)_k [1 + F_1(0)] + i \sigma_{kj} q^j [1 + F_1(0) + F_2(0)] \right\} u(p) A^k(q)$$

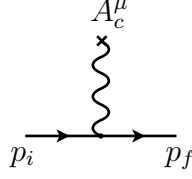


Figura 6.11: Difusão de Coulomb em ordem mais baixa.

$$= \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[-(p' + p)^k - i \Sigma^i \epsilon^{ijk} q^j \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \right] u(p) A^k(q) \quad (6.161)$$

onde se usaram os resultados 6.127

$$\begin{cases} F_1(0) = 0 \\ F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases} \quad (6.162)$$

Usando a forma explícita dos spinores u

$$u(p) = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})}{2m} \chi \end{pmatrix} \quad (6.163)$$

podemos escrever no limite não relativista

$$M = -\frac{e}{2m} \chi^\dagger \left[(p' + p)^k + i \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \sigma^i \epsilon^{ijk} q^j \right] \chi A^k \quad (6.164)$$

o que após identificação com a Eq. (6.159) conduz a

$$a_{th}^e = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (6.165)$$

Este resultado obtido pela primeira vez por Schwinger [31, 32] e confirmado experimentalmente foi muito importante na aceitação do programa de renormalização em QED.

6.3.4 Correções radiativas à difusão de Coulomb

Vimos no capítulo anterior que a difusão de Coulomb correspondente ao diagrama da Figura 6.11, tinha a seguinte expressão para o elemento da matriz S

$$S_{fi} = iZe^2(2\pi)\delta(E_i - E_f) \frac{1}{|\vec{q}|^2} \bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i) \quad (6.166)$$

Vamos agora estudar as correções radiativas a este resultado, em ordem mais baixa. Devido às divergências infravermelhas que vão aparecer é conveniente introduzir uma massa para o fóton, o que em termos dum campo clássico quer dizer um *screening*. Se tomarmos

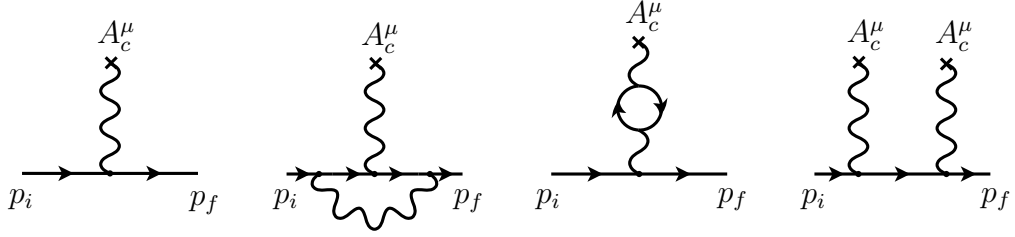


Figura 6.12: Correções à difusão de Coulomb.

$$A_c^0(x) = Ze \frac{e^{-\lambda|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \quad (6.167)$$

então a transformada de Fourier é

$$A_c^0(q) = Ze \frac{1}{|\vec{q}|^2 + \lambda^2} \quad (6.168)$$

o que mostra que o λ tem o efeito duma massa. Com estas modificações temos

$$S_{fi} = iZe^2(2\pi)\delta(E_f - E_i) \frac{i}{|\vec{q}|^2 + \lambda^2} \bar{u}(p_f)\gamma^0 u(p_i) \quad (6.169)$$

Estamos interessados em calcular as correções até à ordem e^3 na amplitude. Para isso contribuem os diagramas¹³ representados na Figura 6.12. O diagrama 1 é de ordem e^2 enquanto que os 2, 3, e 4 são de ordem e^4 . Portanto a interferência entre 1 e (2+3+4) é de ordem α^3 e deverá ser adicionada ao resultado do bremsstrahlung num campo de Coulomb. A contribuição de 1 + 2 + 3 obtém-se muito facilmente notando que

$$\begin{aligned} eA_c^\mu \gamma_\mu &\rightarrow eA_c^\mu (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^R - \Pi^R P_{\mu\rho}^T \gamma^\rho) \\ &= eA_c^\mu \left[\gamma_\mu (1 + F_1(q^2)) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) - \Pi^R(q^2) P_{\mu\rho}^T \gamma^\rho \right] \end{aligned} \quad (6.170)$$

onde $F_i(q^2)$ são dados pela Eq. (6.125) e $\Pi^R(-Q^2)$ foi calculado anteriormente, na Eq. (6.64). Fazendo $Q^2 = |\vec{q}|^2$ obtemos

$$\frac{|\vec{q}|^2}{4m^2} = \sinh^2 \varphi \quad (6.171)$$

podemos escrever (notar que na Eq. (6.125), é $\theta = 2\varphi$),

$$S_{fi}^{(1+2+3)} = iZe^2(2\pi)\delta(E_i - E_f) \frac{1}{|\vec{q}|^2 + \lambda^2} \bar{u}(p_f)\gamma^0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[-\frac{1}{2}\varphi \tanh \varphi \right. \right.$$

¹³Não temos de considerar a self-energy nas linhas do electrão pois este está *on-shell*.

$$\left(1 + \ln \frac{\lambda}{m}\right) (2\varphi \coth 2\varphi - 1) - 2 \coth 2\varphi \int_0^\varphi \beta \tanh \beta d\beta \\ + \left(1 - \frac{\coth^2 \varphi}{3}\right) (\varphi \coth \varphi - 1) + \frac{1}{9} \left[- \frac{\not{q}}{2m} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} \right] \left. \vphantom{\int_0^\varphi} \right\} u(p_i) \quad (6.172)$$

Finalmente o quarto diagrama dá

$$S_{fi}^{(4)} = (iZe)^2 (e)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_f) \left[\frac{2\pi\delta(E_f - k^0)}{(p_f - k)^2 - \lambda^2} \gamma^0 \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^0 \frac{2\pi\delta(k^0 - E_i)}{(k - p_i)^2 - \lambda^2} \right] \\ = -2i \frac{Z^2 \alpha^2}{\pi} 2\pi\delta(E_f - E_i) \bar{u}(p_f) [m(I_1 - I_2) + \gamma^0 E_i (I_1 + I_2)] u(p_i) \quad (6.173)$$

onde

$$I_1 = \int d^3 k \frac{1}{[(\vec{p}_f - \vec{k})^2 + \lambda^2][(\vec{p}_i - \vec{k})^2 + \lambda^2][(\vec{p})^2 - (\vec{k})^2 + i\varepsilon]} \quad (6.174)$$

e

$$\frac{1}{2}(\vec{p}_i + \vec{p}_f) I_2 \equiv \int d^3 k \frac{\vec{k}}{[(\vec{p}_f - \vec{k})^2 + \lambda^2][(\vec{p}_i - \vec{k})^2 + \lambda^2][(\vec{p})^2 - (\vec{k})^2 + i\varepsilon]} \quad (6.175)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$ pode-se mostrar que

$$I_1 = \frac{\pi^2}{2ip^3 \sin^2 \theta/2} \ln \left(\frac{2p \sin(\theta/2)}{\lambda} \right) \quad (6.176)$$

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2p^3 \cos^2 \theta/2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{\sin \theta/2} \right] - i \left[\frac{1}{\sin^2 \theta/2} \ln \left(\frac{2p \sin \theta/2}{\lambda} \right) + \ln \frac{\lambda}{2p} \right] \right\} \quad (6.177)$$

Com estas expressões obtemos para a secção eficaz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{|\vec{q}|^2} \frac{1}{2} \sum_{pol} |\bar{u}(p_f) \Gamma u(p_i)|^2 \quad (6.178)$$

onde

$$\Gamma = \gamma^0(1 + A) + \gamma^0 \frac{\not{q}}{2m} B + C \quad (6.179)$$

e

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) (2\varphi \coth 2\varphi - 1) - 2 \coth 2\varphi \int_0^\varphi d\beta \beta \tanh \beta - \frac{\varphi}{2} \tanh \varphi \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{3} \coth^2 \varphi \right) (\varphi \coth \varphi - 1) + \frac{1}{9} \right] - \frac{Z\alpha}{2\pi^2} |\vec{q}|^2 E (I_1 + I_2) \quad (6.180)$$

$$B = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} \quad (6.181)$$

$$C = -\frac{Z\alpha}{2\pi^2} m |\vec{q}|^2 (I_1 - I_2) \quad (6.182)$$

Então

$$\frac{1}{4} \sum_{pol} |\bar{u}(p_f) p u(p_i)|^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma(\not{p}_i + m) \bar{\Gamma}(\not{p}_f + m)] \\ = 2E^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2) + 2E^2 2B \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ + 2E^2 2\mathcal{R}e A \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2\mathcal{R}e C (2mE) + O(\alpha^2) \quad (6.183)$$

Notar que A , B e C são de ordem α e que a dependência em λ devida ao diagrama 4 desapareceu (o resultado não depende de $\mathcal{I}m A$ ou $\mathcal{I}m C$). Só ficou a dependência em λ do diagrama 2. O resultado final é portanto, até ordem α^3 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{elastic} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[\left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) (2\varphi \coth 2\varphi - 1) - \frac{\varphi}{2} \tanh \varphi \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \coth 2\varphi \int_0^\varphi d\beta \beta \tanh \beta + \left(-\frac{\coth^2 \varphi}{3} \right) (\varphi \coth \varphi - 1) + \frac{1}{9} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta/2}{1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2} \right] + Z\alpha\pi \frac{\beta \sin \frac{\theta}{2} [1 - \sin \theta/2]}{1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2} \right\} \quad (6.184)$$

onde $\beta = |\vec{p}|/E$ é a velocidade do electrão e θ o ângulo de difusão. Tal como tínhamos anunciado, o resultado é divergente infravermelho (no limite $\lambda \rightarrow 0$). Como explicamos anteriormente esta divergência não é física e é resolvida da seguinte maneira. Os detectores têm uma energia abaixo da qual não detectam, pelo que no limite $\omega \rightarrow 0$ o bremsstrahlung na presença do campo de Coulomb e a difusão no campo de Coulomb não são distinguidas pelo detector. Isto quer dizer que temos que somar os dois resultados. Se considerarmos um intervalo de energia ΔE com $\lambda \leq \Delta E \leq E$ obtemos

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) \right]_{BR} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \int_{\omega \leq \Delta E} \frac{d^3 k}{2\omega (2\pi)^3} e^2 \left[\frac{2p_i \cdot p_f}{k_i \cdot p_i k \cdot p_f} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p_f)^2} \right] \quad (6.185)$$

Introduzindo uma massa para o fóton (isto é $\omega = (|\vec{k}|^2 + \lambda^2)^{1/2}$) o integral pode ser efectuado obtendo-se

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) \right]_{BR} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (2\varphi \coth 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta E}{\lambda} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{2} \cosh 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin \theta/2} \int_{\cos \theta/2}^1 d\xi \frac{1}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi^2 - \cos^2 \theta/2]^{1/2}} \ln \frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi} \right\} \quad (6.186)$$

Vemos agora que quando consideramos a secção eficaz inclusiva

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}} + \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) \right]_{BR} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} (1 - \delta_R + \delta_B) \end{aligned} \quad (6.187)$$

o resultado depende da resolução ΔE mas não do parâmetro λ . As expressões explícitas para δ_R (emissão de fóton real ou virtual) e δ_B (aproximação de Born em segunda ordem), uma notação introduzida por Schwinger que fez este cálculo pela primeira vez, são [30],

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[(1 - 2\varphi \coth 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{2\Delta E}{m} \right) + \varphi \tanh \varphi + (1 - \varphi \tanh \varphi) \right. \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\coth^2 \varphi}{3} \right) - \frac{1}{9} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} - \varphi \coth 2\varphi \ln(1-\beta^2) \\ &\quad + \frac{\beta^2 \sin^2(\theta/2)}{1-\beta^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} + \frac{1}{2} \cosh 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin(\theta/2)} \\ &\quad \left. \times \int_{\cos(\theta/2)}^2 d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \cos^2(\theta/2)}} \left[\frac{\ln(1+\beta\xi)}{1-\beta\xi} - \frac{\ln(1-\beta\xi)}{1+\beta\xi} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.188)$$

$$\delta_B = Z\alpha\pi \frac{\beta \sin(\theta/2) [1 - \sin \theta(\theta/2)]}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \quad (6.189)$$

Pode-se mostrar que em QED todas as divergências podem ser tratadas duma forma semelhante, como foi mostrado por Kinoshita [33] por Lee e Nauenberg [34]. O efeito final do bremsstrahlung é finito e pode ser importante, como se pode ver na Fig. 6.13. Notar que o efeito aumenta com a energia, podendo ser mais de 50%.

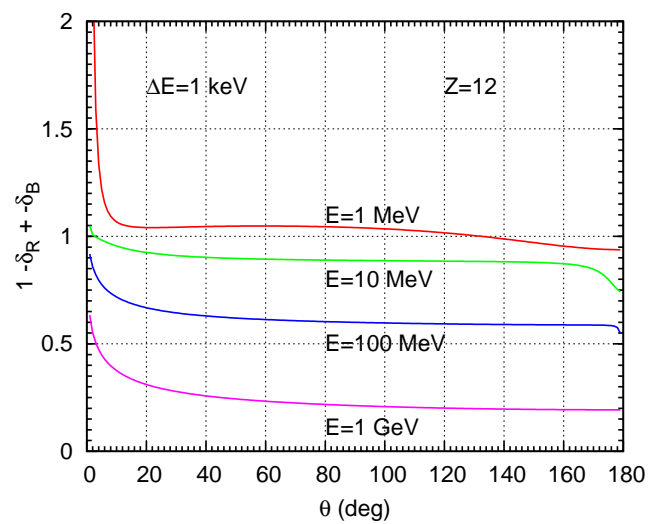


Figura 6.13: Correções finitas à difusão de Coulomb. Na figura está representado o factor $1 - \delta_R + \delta_B$ para $Z = 12$, $\Delta E = 1$ keV e para quatro valores da energia do electrão incidente em função do ângulo θ de difusão.

Apêndice A

Fórmulas úteis para regularização dimensional

A.1 Parâmetro μ

A razão do parâmetro μ introduzindo no texto é a seguinte. Em dimensão $d = 4 - \epsilon$, os campos A_μ e ψ têm as dimensões dadas pelos termos cinéticos da acção

$$\int d^d x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi \right] \quad (\text{A.1})$$

logo

$$\begin{aligned} 0 &= -d + 2 + 2[A_\mu] \Rightarrow [A_\mu] = \frac{1}{2}(d - 2) = 1 - \frac{\epsilon}{2} \\ 0 &= -d + 1 + 2[\psi] \Rightarrow [\psi] = \frac{1}{2}(d - 1) = \frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Usando estas dimensões no termo de interacção

$$S_I = \int d^d x e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (\text{A.3})$$

obtemos

$$\begin{aligned} [S_I] &= -d + [e] + 2[\psi] + [A] \\ &= -4 + \epsilon + [e] + 3 - \epsilon + 1 - \frac{\epsilon}{2} \\ &= [e] - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Portanto se quisermos que a acção não tenha dimensões (notar que $\hbar = c = 1$, portanto a acção não tem dimensões) temos que pôr

$$[e] = \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{A.5})$$

Assim vemos que em dimensões $d \neq 4$ a constante de acoplamento tem dimensões. Como é mais conveniente trabalhar com uma constante de acoplamento sem dimensões introduzimos um parâmetro μ com dimensões de massa e quando estamos em $d \neq 4$ fazemos a substituição

$$e \rightarrow e\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \quad (\epsilon = 4 - d) \quad (\text{A.6})$$

mantendo a constante e sem dimensões.

A.2 Função $\Gamma(z)$ e outras fórmulas úteis

A definição da função Γ é

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.7})$$

ou

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-\mu t} dt = \mu^{-z} \Gamma(z) \quad (\text{A.8})$$

A função Γ tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Outra função relacionada com a função Γ é a sua derivada logarítmica com as propriedades

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \quad (\text{A.10})$$

$$\psi(1) = -C \quad (\text{A.11})$$

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \quad (\text{A.12})$$

onde C é a constante de Euler. A função $\Gamma(z)$ tem pólos para $z = 0, -1, -2, \dots$. Junto do pólo $z = -m$ temos

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{m+z} + \frac{(-1)^m}{m!} \psi(m+1) + O(z+m) \quad (\text{A.13})$$

Daqui concluímos que quando $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + O(\epsilon) \quad \Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(n + 1) + 1 \right] \quad (\text{A.14})$$

que foi o resultado usado no texto.

A.3 Parametrização de Feynman

A forma mais geral para um integral a *one-loop* é

$$\hat{T}_n^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_p}}{D_0 D_1 \dots D_{n-1}} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$D_i = (k + r_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon \quad (\text{A.16})$$

e os momentos r_i estão relacionados com os momentos das partículas (todos tomados a entrar o diagrama) pelas relações,

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{i=1}^j p_i \quad ; \quad j = 1, \dots, n-1 \\ r_0 &= \sum_{i=1}^n p_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

como indicado na Fig. (A.1). Nestas expressões aparecem nos denominadores pro-

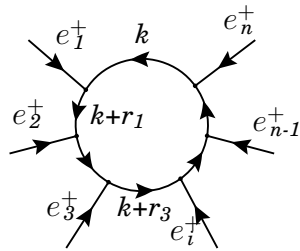


Figura A.1:

duto dos denominadores dos propagadores das partículas no *loop*. É conveniente combinar esses produtos num denominador comum. Isso consegue-se usando uma técnica devida a Feynman. Vamos exemplificar com dois denominadores.

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (\text{A.18})$$

A demonstração é trivial. De facto

$$\int dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} = \frac{x}{b[(a-b)x + b]} \quad (\text{A.19})$$

e portanto obtém-se imediatamente a Eq. (A.18). Tomando sucessivas derivadas em ordem a a e b obtemos

$$\frac{1}{a^p b^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[ax + b(1-x)]^{p+q}} \quad (\text{A.20})$$

e usando indução obtemos uma fórmula geral

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n (1-x_1-\cdots-x_{n-1})]^n} \quad (\text{A.21})$$

Antes de fechar esta secção consideremos um exemplo que é útil para o caso das *self-energy*. Seja a situação com a cinemática descrita na Fig. (A.2).

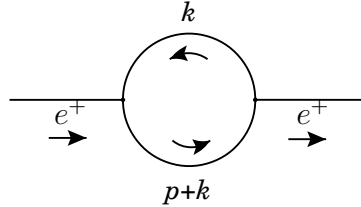


Figura A.2: Diagrama de *self-energy*.

Obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+p)^2 - m_1^2 + i\epsilon][k^2 - m_2^2 + i\epsilon]} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2p \cdot k x + p^2 x - m_1^2 x - m_2^2 (1-x) + i\epsilon]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2P \cdot k - M^2 + i\epsilon]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+P)^2 - P^2 - M^2 + i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde na última linha completámos o quadrado no termo no momento do *loop*. As quantidades P e M^2 são, neste caso,

$$P = xp \tag{A.23}$$

e

$$M^2 = -xp^2 + m_1^2 x + m_2^2 (1 - x) \tag{A.24}$$

Dependem nas massas, momentos exteriores e parâmetros de Feynman, mas não no momento do *loop*. Mudando agora variáveis $k \rightarrow k - P$ eliminamos os termos lineares em k e obtemos finalmente

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - C + i\epsilon]^2} \tag{A.25}$$

onde C é independente do momento do loop e é dado por

$$C = P^2 + M^2 \tag{A.26}$$

Notar que os factores $i\epsilon$ se adicionam correctamente e tudo se pode escrever como na Eq. (A.25).

A.4 Integrais tensoriais em regularização dimensional

Encontramos frequentemente a tarefa de calcular integrais tensoriais da forma da Eq. (A.15),

$$\hat{T}_n^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_p}}{D_0 D_1 \dots D_{n-1}} \tag{A.27}$$

O primeiro passo é reduzir a um denominador comum usando o a técnica da parametrização de Feynman. O resultado é

$$\begin{aligned} \hat{T}_n^{\mu_1 \dots \mu_p} &= \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_{n-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_p}}{[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon]^n} \\ &= \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_{n-1} I_n^{\mu_1 \dots \mu_p} \end{aligned} \tag{A.28}$$

onde definimos

$$I_n^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_p}}{[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon]^n} \tag{A.29}$$

a que chamamos, a partir de agora, integral tensorial. Em princípio todos estes integrais podem ser escritos em termos de integrais escalares. É contudo muitas vezes ter uma fórmula geral para estes integrais. Podemos obter esta fórmula notando que

$$\frac{\partial}{\partial P^\mu} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon]^n} = -n \frac{2k_\mu}{[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon]^{n+1}} \tag{A.30}$$

Usando esta última equação podemos escrever o resultado final

$$I_n^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dt}{(2t)^p} t^{n-3+\epsilon/2} \frac{\partial}{\partial P_{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial P_{\mu_p}} e^{-tC} \quad (\text{A.31})$$

onde $C = P^2 + M^2$. Depois de efectuar as derivadas, os integrais restantes podem ser feitos usando as propriedades da função Γ (ver secção A.2). Notar que P , M^2 , e portanto C , dependem não só nos parâmetros de Feynman mas também nos momentos exteriores. A vantagem de ter uma fórmula geral é que pode ser programada [35] e obter todos os integrais automaticamente.

A.5 Fórmulas explícitas para integrais a *one-loop*

Embora tenhamos apresentado as expressões gerais para todos os integrais que aparecem a *one-loop*, Eqs. (6.22) e (A.31), na prática é conveniente ter expressões explícitas para os casos mais importantes com a expansão em ϵ já feita. Os resultados aqui apresentados foram obtidos com um programa para o **Mathematica** designado **OneLoop** [35]. Nestes resultados a integração nos parâmetros de Feynman ainda tem que ser feita. Este é em geral um problema difícil. Na Ref. [27] são explicados outros métodos para calcular numericamente estes integrais.

A.5.1 Integrais de *Tadpole*

Com as definições das Eqs. (6.22) e (A.31) obtemos

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= \frac{i}{16\pi^2} C(1 + \Delta_\epsilon - \ln C) \\ I_1^\mu &= 0 \\ I_1^{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{8} C^2 g^{\mu\nu} (3 + 2\Delta_\epsilon - 2 \ln C) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

onde para os integrais de *tadpole*

$$P = 0 \quad ; \quad C = m^2 \quad (\text{A.33})$$

porque não há parâmetros de Feynman e há só uma massa. Neste caso os resultados acima são finais.

A.5.2 Integrais de *Self-Energy*

Para os integrais com dois denominadores, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{0,2} &= \frac{i}{16\pi^2} (\Delta_\epsilon - \ln C) \\
I_2^\mu &= \frac{i}{16\pi^2} (-\Delta_\epsilon + \ln C) P^\mu \\
I_2^{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left[C g^{\mu\nu} (1 + \Delta_\epsilon - \ln C) + 2(\Delta_\epsilon - \ln C) P^\mu P^\nu \right] \\
I_2^{\mu\nu\alpha} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left[-C g^{\mu\nu} (1 + \Delta_\epsilon - \ln C) P^\alpha - C g^{\nu\alpha} (1 + \Delta_\epsilon - \ln C) P^\mu \right. \\
&\quad \left. - C g^{\mu\alpha} (1 + \Delta_\epsilon - \ln C) P^\nu - (2\Delta_\epsilon P^\alpha P^\mu - 2 \ln C P^\alpha P^\mu) P^\nu \right] \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

onde, com a notação e convenções da Fig. (A.1), temos

$$P^\mu = x r_1^\mu \quad ; \quad C = x^2 r_1^2 + (1-x) m_2^2 + x m_1^2 - x r_1^2 \quad (\text{A.35})$$

A.5.3 Integrais com três denominadores

Para os integrais com três denominadores obtemos

$$\begin{aligned}
I_{0,3} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{2C} \\
I_3^\mu &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2C} P^\mu \\
I_3^{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4C} \left[C g^{\mu\nu} (\Delta_\epsilon - \ln C) - 2P^\mu P^\nu \right] \\
I_3^{\mu\nu\alpha} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4C} \left[C g^{\mu\nu} (-\Delta_\epsilon + \ln C) P^\alpha + C g^{\nu\alpha} (-\Delta_\epsilon + \ln C) P^\mu \right. \\
&\quad \left. + C g^{\mu\alpha} (-\Delta_\epsilon + \ln C) P^\nu + 2P^\alpha P^\mu P^\nu \right] \\
I_3^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{8C} \left[C^2 (1 + \Delta_\epsilon - \ln C) (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) \right. \\
&\quad + 2C (\Delta_\epsilon - \ln C) (g^{\mu\nu} P^\alpha P^\beta + g^{\nu\beta} P^\alpha P^\mu + g^{\nu\alpha} P^\beta P^\mu + g^{\mu\alpha} P^\beta P^\nu \\
&\quad \left. + g^{\mu\beta} P^\alpha P^\nu + g^{\alpha\beta} P^\mu P^\nu) - 4P^\alpha P^\beta P^\mu P^\nu \right] \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

onde

$$P^\mu = x_1 r_1^\mu + x_2 r_2^\mu$$

$$\begin{aligned}
C &= x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2 + 2x_1 x_2 r_1 \cdot r_2 + x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2 \\
&\quad + (1 - x_1 - x_2) m_3^2 - x_1 r_1^2 - x_2 r_2^2
\end{aligned} \tag{A.37}$$

A.5.4 Integrais com quatro denominadores

$$\begin{aligned}
I_{0,4} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{6C^2} \\
I_4^\mu &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{6C^2} P^\mu \\
I_4^{\mu\nu} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{12C^2} \left[C g^{\mu\nu} - 2P^\mu P^\nu \right] \\
I_4^{\mu\nu\alpha} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{12C^2} \left[C (g^{\mu\nu} P^\alpha + g^{\nu\alpha} P^\mu + g^{\mu\alpha} P^\nu) - 2P^\alpha P^\mu P^\nu \right] \\
I_4^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{12C^2} \left[C^2 (\Delta_\epsilon - \ln C) (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) \right. \\
&\quad \left. - 2C (g^{\mu\nu} P^\alpha P^\beta + g^{\nu\beta} P^\alpha P^\mu + g^{\nu\alpha} P^\beta P^\mu + g^{\mu\alpha} P^\beta P^\nu \right. \\
&\quad \left. + g^{\mu\beta} P^\alpha P^\nu + g^{\alpha\beta} P^\mu P^\nu) + 4P^\alpha P^\beta P^\mu P^\nu \right]
\end{aligned} \tag{A.38}$$

onde

$$\begin{aligned}
P^\mu &= x_1 r_1^\mu + x_2 r_2^\mu + x_3 r_3^\mu \\
C &= x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2 + x_3^2 r_3^2 + 2x_1 x_2 r_1 \cdot r_2 + 2x_1 x_3 r_1 \cdot r_3 + 2x_2 x_3 r_2 \cdot r_3 \\
&\quad + x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2 + x_3 m_3^2 + (1 - x_1 - x_2 - x_3) m_4^2 \\
&\quad - x_1 r_1^2 - x_2 r_2^2 - x_3 r_3^2
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Bibliografia

- [1] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics* (Wiley, New York, 2003).
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New York, 1994).
- [3] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, Lisboa, 2006).
- [4] E. Schrodinger, Ann. Physik **81**, 109 (1926).
- [5] O. Klein, Z. Phys. **41**, 407 (1927).
- [6] W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).
- [7] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A117**, 610 (1928).
- [8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A118**, 351 (1928).
- [9] L. H. Thomas, Nature **117**, 514 (1926).
- [10] L. H. Thomas, Phil. Mag. **3**, 1 (1927).
- [11] B. C. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. **97**, 030801 (2006).
- [12] D. Hanneke, S. Fogwell and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. **100**, 120801 (2008), [0801.1134].
- [13] M. Davier and W. J. Marciano, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **54**, 115 (2004).
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1998).
- [15] V. Bargmann, L. Michel and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
- [16] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
- [17] W. E. Lamb and R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [18] J. C. Romao, <http://porthos.ist.utl.pt/~romao/CTQFT/> .

-
- [19] P. Nogueira, J. Comput. Phys. **105**, 279 (1993).
- [20] P. Nogueira, <http://cfif.ist.utl.pt/paulo/qgraf.html> .
- [21] T. Hahn, <http://www.feynarts.de/cuba/> .
- [22] A. Pukhov, <http://www.ifh.de/pukhov/calchep.html> .
- [23] R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64**, 345 (1991).
- [24] R. Kleiss, Nucl. Phys. **B241**, 61 (1984).
- [25] R. Kleiss and W. J. Stirling, Nucl. Phys. **B262**, 235 (1985).
- [26] J. C. Romao and A. Barroso, Phys. Lett. **B185**, 195 (1987).
- [27] J. C. Romao, <http://porthos.ist.utl.pt/OneLoop/one-loop.pdf> .
- [28] J. C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [29] Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6**, 371 (1957).
- [30] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [31] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948).
- [32] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
- [33] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3**, 650 (1962).
- [34] T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **133**, B1549 (1964).
- [35] J. C. Romao, <http://porthos.ist.utl.pt/OneLoop> .