Teoria de Campo – Série 1

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2014/2015

`Entregar até 8/4/2015`

`Versão de 1/03/2015`

1.1 Para uma colisão $1 + 2 \to 3 + 4$ podemos definir no referencial do centro de massa (`CM`),

$$P_{\text{CM}} = (\sqrt{s}, \vec{0}) = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

onde $\sqrt{s}$ é a energia total no referencial `CM`. Mostre que,

$$p^0_{1\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad p^0_{2\text{CM}} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}$$

$$p^0_{3\text{CM}} = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \qquad p^0_{4\text{CM}} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}$$

$$|\vec{p}_1|_{\text{CM}} = \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_1, m_2)}{2\sqrt{s}}, \quad |\vec{p}_3|_{\text{CM}} = \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_3, m_4)}{2\sqrt{s}}$$

onde

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2}$$

Nota: Este problema é muito importante e vamos usar estes resultados muitas vezes.

1.2 Preencha as entradas da *tabela de multiplicação* das matrizes γ indicada na Tabela **??**. Esta tabela torna-se muito útil em cálculos práticos. Para estabelecer a tabela tenha em atenção que qualquer produto de matrizes γ se pode escrever em termos das 16 matrizes independentes e que com as nossas convenções

$$\varepsilon^{0123} = +1\,, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta_2\gamma_2\delta_2} = -\sum_P (-1)^P g^{P[\beta_2}_{\beta_1} g^{\gamma_2}_{\gamma_1} g^{\delta_2]}_{\delta_1}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma_2\delta_2} = -2\left(g^{\gamma_2}_{\gamma_1} g^{\delta_2}_{\delta_1} - g^{\delta_2}_{\gamma_1} g^{\gamma_2}_{\delta_1}\right)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta_2} = -6 g^{\delta_2}_{\delta_1}\,.$$

	1	γ_5	γ^μ	$\gamma_5\gamma^\mu$	$\sigma^{\mu\nu}$
1	1				
γ_5					
γ^α					
$\gamma_5\gamma^\alpha$					
$\sigma^{\alpha\beta}$					

Table 1: Tabela de multiplicação de matrizes γ.

Nota: Quando conseguir fazer esta tabela de multiplicação, ficará seguro de que não mais terá problemas com as matrizes gama.

1.3 Demonstre somente duas das nove relações seguintes. Escolha as que quiser.

$$\overline{u}(p,s)u(p,s') = 2m\ \delta_{ss'} \qquad \overline{v}(p,s)v(p,s') = -2m\ \delta_{ss'}$$

$$u^\dagger(p,s)u(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'} \qquad v^\dagger(p,s)v(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'}$$

$$\overline{v}(p,s)u(p,s') = 0 \qquad v^\dagger(p,s)u(-p,s') = 0$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s)] = (\not{p}+m)_{\alpha\beta} \qquad \sum_s [v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = -(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = 2m\ \delta_{\alpha\beta}$$

1.4 Definimos $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$.

a) Prove a identidade:

$$\left(1 - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right) = \left(1 - \frac{|\vec{p}|}{E+m}\right)\frac{1+\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{2} + \left(1 + \frac{|\vec{p}|}{E+m}\right)\frac{1-\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{2}$$

b) Considere um campo fermiónico com massa, com quiralidade esquerda, definido por

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi$$

onde ψ é um spinor de energia positiva. Mostre que se pode escrever,

$$\psi_L = N \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\alpha_P\ \frac{1+\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{2} + \alpha_N\ \frac{1-\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{2}\right] \chi\ e^{-ip\cdot x}$$

onde N é uma normalização e χ um spinor de duas componentes. Determine α_P e α_N (a menos duma normalização). Qual o seu significado?

c) Define-se a polarização do fermião quiral ψ_L como sendo

$$P = \frac{|\alpha_P|^2 - |\alpha_N|^2}{|\alpha_P|^2 + |\alpha_N|^2}$$

Mostre que $P = -|\vec{p}|/E = -\beta$. Discuta o valor limite quando $|\vec{p}| \gg m$.

1.5 Partindo da definição

$$S_{fi} = \lim_{t\to\varepsilon_f\infty} \int d^3x\ \psi_f^\dagger(x)\Psi_i(x)$$

obtenha a expressão central do Capítulo 2, Eq. (2.50),

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ieQ_e\varepsilon_f \int d^4y\ \overline{\psi}_f(y)\not{A}(y)\Psi_i(y)\,. \tag{1}$$

onde $e > 0$ e $Q_e = -1$. Esta demonstração tem algumas subtilezas, por isso vamos por passos.

a) Mostre que (Eq. (2.40))

$$S_F(x'-x) = \theta(t'-t)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\overline{\psi}_p^r(x) - \theta(t-t')\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\overline{\psi}_p^r(x)$$

onde

$$\psi_p^r(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}}\; w^r(\vec{p})\; e^{-i\varepsilon_r p\cdot x}$$

Notar a diferente normalização para estar de acordo com a Eq. (2.51). Mudaremos isso no futuro.

b) Deduza as Eqs. (2.48) e (2.49),

$$\lim_{t\to+\infty}\Psi(x)-\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x)\left[-ieQ_e\int d^4y\;\overline{\psi}_p^r(y)\not{A}(y)\Psi(y)\right]$$

$$\lim_{t\to-\infty}\Psi(x)-\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x)\left[+ieQ_e\int d^4y\;\overline{\psi}_p^r(y)\not{A}(y)\Psi(y)\right]$$

c) Use as expressões anteriores para demonstrar a Eq. (1).