Tópicos em Física de Partículas
2º Semestre 1997/98

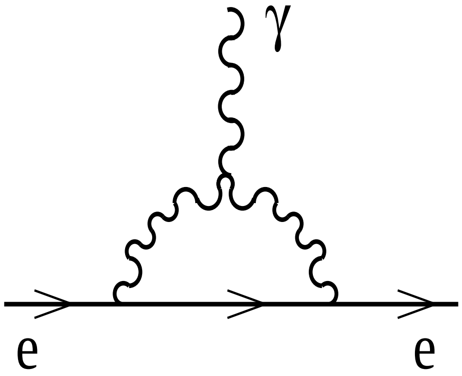
Escolha **um** dos temas a seguir propostos. Deverá escrever um pequeno texto sobre o tema que escolher e fazer uma apresentação oral do mesmo perante os colegas numa sessão a organizar em Julho em data a combinar. A duração da apresentação oral será no máximo de 30 minutos.

QED numa gauge não linear

Considere QED com a condição de gauge não linear

$$F = \partial_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{2}\, A_\mu A^\mu \ .$$

1. Escreva $\mathcal{L}_{eff}$ e mostre que $s\mathcal{L}_{eff} = 0$, onde s é o operador de Slavnov.
2. Escreva as regras de Feynman para os vértices e propagadores novos. Calcule ao nível árvore $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$. Compare com o resultado na gauge linear.
3. Calcule a polarização do vácuo a *1-loop*.
4. Mostre que o diagrama da figura junta potencialmente perigoso para o momento magnético anómalo do electrão não dá contribuição (seria proporcional a λ).



Polarização do vácuo em QCD

Considere a teoria que descreve as interacções dos quarks com os gluões (QCD) descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}^\alpha_i (i\not{D} - m_\alpha)_{ij} \psi^\alpha_j$$

onde

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \\ (D_\mu)_{ij} &= \delta_{ij} \partial_\mu - ig \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} A^a_\mu \ . \end{aligned}$$

O índice $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ referencia os diferentes *sabores* de quarks (*up*,*down*,...,*top*). Para quantificar a teoria considere a condição de gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \ (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \ ,$$

para a qual resulta o Lagrangeano dos fantasmas

$$\mathcal{L}_G = \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ .$$

Para renormalizar a teoria necessitamos do seguinte Lagrangeano de contratermos:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} \ = \ & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1) \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)^2 - (Z_4 - 1) g f^{abc} \partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} \\ & -\frac{1}{4} g^2 (Z_5 - 1) f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} + \sum_\alpha (Z_2 - 1) i \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha_i \\ & - \sum_\alpha m_\alpha (Z_{m_\alpha} - 1) \overline{\psi}^\alpha_i \psi^\alpha_i + (Z_1 - 1) g \sum_\alpha \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} \psi^\alpha_j A^a_\mu \\ & + (Z_6 - 1) \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + (Z_7 - 1) g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ . \end{aligned}$$

1. Verifique a expressão para $\mathcal{L}_G$.
2. Verifique as regras de Feynman dadas no livro.
3. Calcule a polarização do vácuo.

Métodos Funcionais em QED:Funcionais Geradores

O funcional gerador das funções de Green para QED é dado por

$$Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi})\ e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{QED}+\mathcal{L}_{GF}+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)}\ .$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\
\mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \\
D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu\ .
\end{aligned}$$

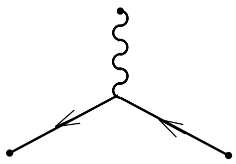
1. Calcule $Z_0[J^\mu, \eta, \overline{\eta}]$
2. Mostre que

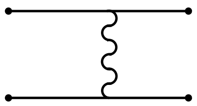
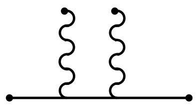
$$Z[J^\mu, \eta, \overline{\eta}] = \exp\left\{(-e)\int d^4x \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\beta(x)}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right\} Z_0[J^\mu, \eta, \overline{\eta}]\ .$$

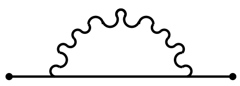
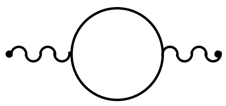
3. Expanda

$$Z = Z_0\left[1 + (-ie)Z_1 + (-ie)^2 Z_2 + \cdots\right]$$

onde se retiraram as amplitudes vácuo-vácuo em Z_i, isto é, $Z_i[0] = 0 \to Z[0] = 1$. Mostre que

$Z_1 = -i$ 

$Z_2 = \frac{1}{2}Z_1^2 \quad + \quad \frac{1}{2}$  $+$ 

$-$  $+ \quad \frac{1}{2}$ 

4. Discuta os factores numéricos e os sinais das expressões anteriores.

5. Calcule em ordem mais baixa

$$\langle 0| \, T A^\mu(x)\psi_\beta(y)\overline{\psi}_\alpha(z) \, |0\rangle = \frac{\delta^3 Z}{i\delta\eta_\alpha(z) i\delta\overline{\eta}_\beta(y) i\delta J_\mu(x)}$$

e verifique que coincide com as regras de Feynman para o vértice.

6. Calcule a amplitude para o efeito de Compton em ordem mais baixa, isto é

$$\langle 0| \, T A^\mu(x) A^\nu(y)\psi_\beta(z)\overline{\psi}_\alpha(w) \, |0\rangle = \frac{\delta^4 Z}{i\delta\eta_\alpha(w) i\delta\overline{\eta}_\beta(z) i\delta J_\nu(y) i\delta J_\mu}$$

e verifique que reproduz o que se obtém usando as regras de Feynman usuais.

Métodos Funcionais em QED:Identidades de Ward

As identidades de Ward para QED deduzidas na secção 1.7 não têm a forma

$$J_i F_i \left[\frac{\partial}{i\partial J}\right] \; Z(J) = 0$$

onde $\delta\phi_i = F_i[\phi]$ pois

$$S_{GF} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi}\,(\partial\cdot A)^2\right)$$

não é invariante para transformações de gauge. Introduza o funcional

$$Z'(J_\mu,\eta,\overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi},\omega,\overline{\omega})\; e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)}$$

onde

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G$$

e

$$\mathcal{L}_G = -\overline{\omega}\Box\omega\ .$$

onde ω e $\overline{\omega}$ são campos escalares anticomutativos.

1. Mostre que

$$Z'(J_\mu,\eta,\overline{\eta}) = \mathcal{N}\; Z(J_\mu,\eta,\overline{\eta})$$

onde $\mathcal{N}$ não depende das fontes nem dos campos. Explique porque é que esta renormalização (infinita) não afecta o cálculo das funções de Green. Assim tanto Z como Z' servem para o cálculo destas.

2. Mostre que a medida $\mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi},\omega,\overline{\omega})$ e $\int d^4x\mathcal{L}_{eff}$ são invariantes para a transformação

$$\delta\psi = -ie\omega\theta\psi \qquad \delta\overline{\psi} = ie\overline{\psi}\omega\theta$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\omega\theta$$

$$\delta\overline{\omega} = \tfrac{1}{\xi}(\partial\cdot A)\theta \quad \delta\omega = 0$$

onde θ é um parâmetro anticomutativo constante (variável de Grassman).

3. Introduza fontes anticomutativas para os campos ω e $\overline{\omega}$, isto é

$$\overline{Z}(J_\mu,\eta,\overline{\eta},\zeta,\overline{\zeta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi},\omega,\overline{\omega}) e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+\overline{\omega}\zeta+\overline{\zeta}\omega)}$$

Mostre que

$$\overline{Z}(J_\mu,\eta,\overline{\eta},\zeta,\overline{\zeta}) = Z_G(\zeta,\overline{\zeta})\; Z(J_\mu,\eta,\overline{\eta})$$

onde

$$Z(J_\mu,\eta,\overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi})\ e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{QED}+\mathcal{L}_{GF}+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)}\ .$$

Considere os funcionais $\overline{W}$, W_G e W e ainda $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ definidos de maneira semelhante. Qual a relação entre $\overline{W}$, W_G e W e entre $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ .

4. Mostre que a equação de Dyson Schwinger para os campos ω e $\overline{\omega}$ é

$$\frac{\delta\overline{\Gamma}}{\delta\overline{\omega}} = -\Box\omega\ .$$

5. Mostre que as identidades de Ward se podem agora escrever na forma

$$J_i F_i[\frac{\delta}{i\delta J}]\overline{Z} = 0\ .$$

Escreva as identidades de Ward para $\overline{\Gamma}(A_\mu,\psi,\overline{\psi},\omega,\overline{\omega})$. Mostre que conduzem aos resultados conhecidos

6. Mostre que um termo de massa para o fotão, embora quebre a simetria de gauge, não estraga as identidades de Ward desde que os fantasmas ω adquiram massa. Se o termo de massa do fotão for $\frac{1}{2}\ \mu^2 A_\mu A^\mu$ qual a massa dos fantasmas?

Soluções Estáticas em Teorias Não Abelianas

Ansatze de S. Coleman

Mostre que o seguinte *Ansatze* (S. Coleman, Phys. Lett70B (77), 59)

$$\begin{aligned} A^{1a} &= A^{2a} = 0 \\ A^{0a} &= -A^{3a} = x^1 f^a(x^0 + x^3) + x^2 g^a(x^0 + x^3) \end{aligned} \tag{1}$$

onde f^a e g^a são funções arbitrárias, são soluções das equações de YM sem matéria. Discuta esta solução.

Ansatze de Wu-Yang

Considere o *Ansatze* de Wu-Yang para soluções estáticas em SU(2) YM.

$$A^{0a} = x^a \, \frac{G(r)}{r^2} \qquad\qquad A^{ia} = \varepsilon^{aij} \; x^j \frac{F(r)}{r^2}$$

1. Deduza as equações a que F e G devem obedecer.

2. Mostre que elas são satisfeitas para $F = -1/g$ e $G =$ constante. Mostre que estas soluções correspondem a $\rho^a = {}^*\rho^a = 0$ e $\vec{J}^a = {}^*\vec{J}^a = 0$. ($\rho^a$, ... são definidos no problema 2.14).

3. Para as soluções da alínea b) descreva o potencial e os campos e calcule a energia.

Estrutura das Teorias Não Abelianas

1. Mostre que o tensor $F^a_{\mu\nu}$ dos campos de Yang-Mills satisfaz as identidades de Bianchi:

$$D^{ab}_\mu F^b_{\rho\sigma} + D^{ab}_\rho F^b_{\sigma\mu} + D^{ab}_\sigma F^b_{\mu\rho} = 0$$

ou

$$D^{ab}_\mu {}^*F^{\mu\nu\ b} = 0$$

onde

$${}^*F^{\mu\nu\ a} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma}$$

2. Explique o significado geométrico da Identidades de Bianchi. **Sugestão:** Veja o artigo de R.P. Feynman em *Les Houches, Session XXIX, 1976*, North Holland, 1977, Pags: 135-140.

3. Considere a teoria de Yang-Mills (YM) sem matéria.

   (a) Mostre que as eqs. de YM sem matéria se podem escrever na forma

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}^a = \rho^a \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}^a = {}^*\rho^a \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}^a = -\frac{\partial\vec{B}^a}{\partial t} + \vec{J}^a \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}^a = -\frac{\partial\vec{E}^a}{\partial t} + {}^*\vec{J}^a \end{cases}$$

   calcule ρ^a, ${}^*\rho^a$, $\vec{J}^a$ e ${}^*\vec{J}^a$.

   (b) Mostre que as 4-correntes $j^a_\mu \equiv (\rho^a, \vec{J}^a)$ e ${}^*j^a_\mu \equiv ({}^*\rho^a, {}^*\vec{J}^a)$ são conservadas.

4. Mostre que $\mathrm{Tr}\,({}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ é uma 4-divergência. Comente sobre a sua inclusão na acção.

Renormalização da Electrodinâmica Escalar

Considere a Electrodinâmica Escalar, isto é a teoria da interacção de fotões com partículas escalares carregadas.

1. Escreva o Lagrangeano para esta teoria.
2. Deduza as regras de Feynman.
3. Identifique os diagramas divergentes.
4. Faça a renormalização das auto energias do fotão e da partícula carregada.

Nota. Para este trabalho é conveniente consultar a nova versão do Apêndice do livro de Introdução à Teoria do Campo que pode ser obtida por `ftp` no seguinte endereço: `ftp://porthos.ist.utl.pt/pub/textos/tc1apendice.ps.gz`.

Renormalização de QED Supersimétrica

Considere a QED supersimétrica, isto é a teoria da interacção de fotões com electrões e dos seus parceiros supersimétricos, fotino e selectrões.

1. Escreva o Lagrangeano para esta teoria.
2. Deduza as regras de Feynman.
3. Identifique os diagramas divergentes.
4. Calcule a auto energia do selectrão e mostre que as divergências quadráticas cancelam.

Nota. Para este trabalho é conveniente consultar a nova versão do Apêndice do livro de Introdução à Teoria do Campo que pode ser obtida por `ftp` no seguinte endereço: `ftp://porthos.ist.utl.pt/pub/textos/tc1apendice.ps.gz`.

Renormalização do Modelo de Wess-Zumino

Considere o modelo de Wess e Zumino descrito pelo Lagrangiano seguinte

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \tfrac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\, \partial_\mu \psi - \tfrac{1}{2}m^2 A^2 - \tfrac{1}{2}m^2 B^2 - \tfrac{1}{2}m\overline{\psi}\psi \\
& - \frac{\lambda^2}{4}\left(A^2 + B^2\right)^2 - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}} A \left(A^2 + B^2\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} A\overline{\psi}\psi + \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} B\overline{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned} \tag{2}
$$

onde o fermião ψ é uma partícula de Majorana e A e B são campos escalares reais.

1. Deduza as regras de Feynman (não esquecer que o fermião é de Majorana).

2. Identifique os diagramas divergentes.

3. Calcule a auto energia do campo escalar e mostre que as divergências quadráticas cancelam.

4. Para renormalizar o modelo é necessário um lagrangeano de contratermos da forma geral

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\delta Z_A \partial_\mu A \partial^\mu A + \frac{1}{2}\delta Z_B \partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{i}{2}\delta Z_\psi \overline{\psi}\gamma^\mu\, \partial_\mu \psi \\
& - \frac{1}{2}m^2(2\delta Z_m + \delta Z_A)A^2 - \frac{1}{2}m^2(2\delta Z_m + \delta Z_B)B^2 - \frac{1}{2}m(\delta Z_m + \delta Z_\psi)\overline{\psi}\psi \\
& - \frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + 2\delta Z_A)A^4 - \frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + 2\delta Z_B)B^4 \\
& - 2\frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + \delta Z_A + \delta Z_B)A^2B^2 \\
& - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_m + \delta Z_\lambda + \frac{3}{2}\delta Z_A)A^3 - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_m + \delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_A + \delta Z_B)AB^2 \\
& - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_A + \delta Z_\psi)A\overline{\psi}\psi + \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_B + \delta Z_\psi)B\overline{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}
$$

   Mostre que as 6 constantes de renormalização estão todas relacionadas, só há uma independente, uma renormalização da função de onda. Para isso calcule todas as constantes em MS (subtração mínima).

Nota. Para este trabalho é conveniente consultar a nova versão do Apêndice do livro de Introdução à Teoria do Campo que pode ser obtida por `ftp` no seguinte endereço: `ftp://porthos.ist.utl.pt/pub/textos/tc1apendice.ps.gz`.