Advanced Quantum Field Theory
Chapter 6
Non-Abelian Gauge Theories

Jorge C. Romão
Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

Fall 2013

Lecture 9

Vamos brevemente rever como se constrói a acção clássica para uma teoria de gauge não abeliana (Yang-Mills). Consideremos um grupo compacto G correspondendo a uma simetria interna. Seja ϕ_i, $(i = 1, \cdots, N)$ um conjunto de campos que se transformam de acordo com uma representação de dimensão N de G, isto é

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(g)\phi(x)$$

onde $U(g)$ é uma matriz $N \times N$. Numa transformação infinitesimal

$$g = 1 - i\alpha^a t^a \qquad\qquad a = 1, \cdots, r$$

onde os parâmetros α^a são infinitesimais e t^a são os geradores do grupo satisfazendo as relações, para a representação fundamental

$$\left[t^a, t^b\right] = i f^{abc} t^c$$

$$Tr\left(t^a t^b\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

- Exemplos destes geradores são

$$SU(2) \qquad t^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad ; \quad a = 1,2,3$$

$$SU(3) \qquad t^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad ; \quad a = 1,\cdots,8$$

onde σ^a e λ^a são as matrizes de Pauli e Gell-Mann respectivamente.

- Na representação associada aos campos ϕ_i, as matrizes T^a de dimensão $(N \times N)$ formam uma representação de álgebra de Lie, isto é,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

A sua normalização é dada por

$$Tr(T^a T^b) = \delta^{ab} T(R)$$

onde $T(R)$ é um número característico da representação R.

Group Theory · · ·

- Para uma dada representação mostra-se a identidade

$$T(R)\ r = d(R) C_2(R)$$

onde r é a dimensão do Grupo G e $d(R)$ é a dimensão da representação R.

- Numa transformação infinitesimal

$$\delta\phi = -i\alpha^a T^a \phi \equiv -i\underset{\sim}{\alpha}\phi$$

onde introduzimos a notação $\underset{\sim}{\alpha} \equiv \alpha^a T^a$.

Covariant derivative

- Para resolver o problema da derivada não se transformar como os campos, isto é,

$$\partial_\mu \phi' \neq U \partial_\mu \phi$$

quando os parâmetros dependem de x^α, introduz-se a derivada covariante

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig \underset{\sim}{A}_\mu)\phi \qquad ; \qquad \underset{\sim}{A}_\mu = A^a_\mu T^a$$

onde A^a_μ são os campos de gauge (tantos quantos os geradores do grupo).

- As propriedades de transformação de A^a_μ são obtidas exigindo que $D_\mu \phi$ se transforme como ϕ, isto é,

$$\begin{aligned}
(D_\mu \phi)' &= (\partial_\mu - ig \underset{\sim}{A}'_\mu)\phi' = (\partial_\mu - ig \underset{\sim}{A}'_\mu) U \phi \\
&= \partial_\mu U \phi + U \partial_\mu \phi - ig \underset{\sim}{A}'_\mu U \phi \\
&= U D_\mu \phi + (igU \underset{\sim}{A}_\mu - ig \underset{\sim}{A}'_\mu U + \partial_\mu U)\phi
\end{aligned}$$

- Portanto $(D_\mu \phi)' = U(D_\mu \phi)$ requer

$$\underset{\sim}{A}'_\mu = U \underset{\sim}{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^{-1}$$

- Infinitesimalmente $U \simeq 1 - i\underset{\sim}{\alpha}$ e obtemos

$$\delta \underset{\sim}{A}_\mu \equiv \underset{\sim}{A}'_\mu - \underset{\sim}{A}_\mu = -i \left[\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{A}_\mu \right] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underset{\sim}{\alpha}$$

o que se escreve em componentes

$$\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= -\frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{bca} \alpha^b A^c_\mu \\ &= -\frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a - g f^{bca} \alpha^b A^c_\mu) \end{aligned}$$

Covariant derivative . . .

Como na representação adjunta $(T^c)_{ab} = -if^{bca}$ então

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}\left(\partial_\mu \delta_{ab} - ig(T^c)_{ab} A^c_\mu\right)\alpha^b$$

ou ainda

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}(D_\mu \alpha)^a$$

Tensor $F_{\mu\nu}$

Calculemos o comutador de duas derivadas covariantes

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\,\phi &= \left[\partial_\mu - ig\underset{\sim}{A}_\mu, \partial_\nu - ig\underset{\sim}{A}_\nu\right]\phi \\
&= -ig\left(\partial_\mu \underset{\sim}{A}_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu\right]\right)\phi \\
&\equiv -ig\,\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\,\phi
\end{aligned}$$

onde se definiu o tensor $\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu} T^a$ designado por curvatura,

$$\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underset{\sim}{A}_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu\right]$$

ou em componentes

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Tensor $F_{\mu\nu}$ $\cdots$

Vejamos como se transforma $F_{\mu\nu}$ numa transformação de gauge.

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \underset{\sim}{A}'_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}'_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}'_\mu, \underset{\sim}{A}'_\nu\right] \\
&= \left[\partial_\mu (U\underset{\sim}{A}_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g}\partial_\mu(\partial_\nu U U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu)\right] \\
&\quad -igU[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu]U^{-1} - \left[\partial_\mu U U^{-1}, U\underset{\sim}{A}_\nu U^{-1}\right] \\
&\quad -\left[U\underset{\sim}{A}_\mu U^{-1}, \partial_\nu U U^{-1}\right] + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U U^{-1}, \partial_\nu U U^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Usando

$$\partial_\mu U^{-1} = -U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}$$

obtemos (depois de algumas contas)

$$\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu} = U\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}U^{-1}$$

Tensor $F_{\mu\nu}$ ···

ou infinitesimalmente

$$\delta \underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = -i \left[\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{F}_{\mu\nu} \right]$$

É fácil de ver que com o tensor $F_{\mu\nu}$ é possível construir um invariante. De facto a quantidade

$$\text{Tr}(\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu} \underset{\sim}{F}'^{\mu\nu}) = \text{Tr}(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} \underset{\sim}{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

é invariante e pode ser usada para construir uma acção, generalizando para as teorias de Yang-Mills a acção de Maxwell para as teorias abelianas

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} \underset{\sim}{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

Choice of gauge

- Chama-se *gauge pura* ao potencial $\underset{\sim}{A}^{\mu}$ tal que $\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = 0$. É fácil de mostrar que

$$F_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \exists U : \underset{\sim}{A}_{\mu} = \partial_\mu U U^{-1}$$

- Para evitar a arbitrariedade de gauge é conveniente por vezes impor condições de gauge. Exemplos são a *Gauge Axial* definida por

$$n^\mu A_\mu(x) = 0$$

onde n^μ é um quadrivector constante, e a *Gauge Lorentz*

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

The action and the equations of motion

A acção para a teoria de gauge pura é

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x \mathsf{Tr}(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$$

Devido ao resultado anterior sobre $\mathsf{Tr}(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}^{\mu\nu})$, a acção é invariante para transformações do grupo de gauge G. A equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} = 0$$

obtém-se facilmente notando que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\rho\sigma}}\frac{\delta F^b_{\rho\sigma}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} = -F^{a\,\mu\nu}$$

e

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\rho\sigma}}\frac{\delta F^b_{\rho\sigma}}{\delta A^a_\nu} = g f^{bca} A^b_\mu F^{c\mu\nu}$$

The action and the equations of motion · · ·

- Então

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} + g f^{bca} A^b_\mu F^{\mu\nu c} = 0$$

- Atendendo a que na representação adjunta $(T^c)_{ab} = -i f^{bca}$ obtemos

$$(\partial_\mu \delta_{ab} - ig(T^c)_{ab} A^c_\mu) F^{\mu\nu b} = 0$$

isto é

$$D^{ab}_\mu F^{\mu\nu b} = 0$$

equivalente às equações de Maxwell na ausência de fontes.

- Tal como na teoria de Maxwell da antisimetria de $F^{\mu\nu a}$ podem-se deduzir as identidades de Bianchi

$$D^{ab}_\mu F_{\nu\rho b} + D^{ab}_\nu F_{\rho\mu b} + D^{ab}_\rho F_{\mu\nu b} = 0$$

equivalente às equações de Maxwell homogéneas

Energy–momentum tensor

Como para o Electromagnetismo o tensor canónico não é invariante de gauge. De facto

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}^{\mu\nu} &= -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\rho)}\partial^\nu A^a_\rho + g^{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= F^{\mu\rho a}\partial^\nu A^a_\rho - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma a}F^a_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

Para o tornar invariante de gauge procedemos como no electromagnetismo. Subtraímos a $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$ uma quantidade que seja uma divergência para que as leis de conservação não venham alteradas. A quantidade relevante é

$$\begin{aligned}\Delta\theta^{\mu\nu} &= \partial_\rho(F^{\mu\rho a}A^{\nu a}) \\ &= \partial_\rho F^{\mu\rho a}A^{\nu a} + F^{\mu\rho a}\partial_\rho A^{\nu a} \\ &= g f^{bca}A^b_\rho F^{\rho\mu c}A^{\nu a} + F^{\mu\rho a}\partial_\rho A^{\nu a} \\ &= F^{\mu\rho a}(-F^{\nu a}_\rho + \partial^\nu A^a_\rho)\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} &\equiv \tilde{\theta}^{\mu\nu} - \Delta\theta^{\mu\nu} \\ &= F^{\mu\rho a} F^{\nu a}_{\rho} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma a} F^{a}_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

expressão análoga à obtida no electromagnetismo. Introduzindo os análogos dos campos eléctricos e magnéticos

$$E^i_a = F^{i0}_a \ ; \ B^k_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^{ij}_a \qquad i,j,k = 1,2,3$$

obtemos

$$\begin{cases} \theta^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) \\ \theta^{0i} = (\vec{E}^a \times \vec{B}^a)^i \end{cases}$$

com uma interpretação semelhante ao caso do electromagnetismo.

Hamiltonian formalism

Da expressão para θ^{00} é claro que o Hamiltoniano é

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) = \int d^3x \mathcal{H}$$

onde a $\mathcal{H}$ é a densidade Hamiltoniana.
Vamos ver no entanto que devido à invariância de gauge a relação entre o Hamiltoniano e o Lagrangeano não é a usual. Para isso é conveniente partir da acção escrita em formalismo de 1ª ordem.

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu) F^{\mu\nu a} + \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \right\}$$

onde A^a_μ e $F^a_{\mu\nu}$ são agora variáveis independentes. É fácil de ver que a variação de S em ordem a $F^a_{\mu\nu}$ dá a sua definição

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

e que por sua vez substituindo em S obtemos a acção usual.

Hamiltonian formalism · · ·

Usando as definições de $\vec{E}^a$ e $\vec{B}^a$ obtemos

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x - (\partial^0 \vec{A}^a + \vec{\nabla} A^{0a} - g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c) \cdot \vec{E}^a - \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) \\
&= \int d^4x \left\{ -\partial^0 \vec{A}^a \cdot \vec{E}^a - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + A^{0a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c) \right\}
\end{aligned}
$$

A densidade Lagrangeana escreve-se, portanto

$$
\mathcal{L} = -E^{ka} \partial^0 A^{ka} - \mathcal{H}(E^{ka}, A^{ka}) + A^{0a} C^a
$$

onde

$$
\begin{cases}
\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) \\[2ex]
B^{ka} \equiv -\frac{1}{2} \epsilon^{kmn} F^{mna} \\[2ex]
C^a = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c
\end{cases}
$$

Hamiltonian formalism ···

- As variáveis A_k^a e $-E_k^a$ são as variáveis conjugadas, $\mathcal{H}(E_k^a, A_k^a)$ é a densidade Hamiltoniana. As variáveis A^{0a} desempenham o papel de multiplicadores de Lagrange para as condições,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c = 0$$

que não são mais do que as equações de movimento para $\nu = 0$.

- Se introduzirmos os parêntesis de Poisson a tempo igual

$$\{A^{ia}(x), E^{jb}(y)\}_{x_0=y_0} = \delta^{ij}\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

é fácil de mostrar que

$$\{C^a(x), C^b(y)\}_{x_0=y_0} = -g f^{abc} C^c(x) \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{\mathcal{H}, C^a(x)\} = 0$$

- Isto mostra que as teorias de gauge (não abelianas neste caso, mas a afirmação é igualmente verdadeira para teorias abelianas) representam um exemplo daquilo a que se chama *Sistemas de Hamilton Generalizados* primeiro introduzidos por Dirac.

Hamiltonian formalism $\cdots$

❒ Para definir estes sistemas consideremos um sistema com as variáveis canónicas (p_i, q_i) que geram o espaço de fase Γ^{2n} $(i = 1, \ldots, n)$. Então a acção destes sistemas é escrita na forma

$$S = \int L(t)dt \quad \text{onde} \quad L(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - h(p,q) - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^\alpha \varphi_\alpha(p,q)$$

❒ As variáveis $\lambda^\alpha (\alpha = 1, ...m)$ são multiplicadores de Lagrange e φ^α são as ligações. Para que este sistema seja um sistema de Hamilton generalizado é necessário que as condições seguintes sejam verificadas

$$\begin{aligned}
\{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\} &= \sum_\alpha f^{\alpha\beta\gamma}(p,q)\varphi^\gamma \\
\{h, \varphi^\alpha\} &= f^{\alpha\beta}(p,q)\varphi^\beta
\end{aligned}$$

❒ O caso das teorias de gauge é um caso particular com $f^{\alpha\beta} = 0$. Portanto para a quantificação das teorias de gauge temos primeiro de aprender a quantificar sistemas Hamilton generalizados.

Systems with n degrees of freedom

Consideremos um *sistema de Hamilton generalizado* descrito na última secção. O seu Lagrangeano é

$$L(t) = p_i \dot{q}_i - h(p,q) - \lambda^\alpha \varphi^\alpha(p,q)$$

que conduz às equações de movimento

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} + \lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = -\dfrac{\partial h}{\partial q_i} - \lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q_i} \\[2ex] \varphi^\alpha(p,q) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Pode-se mostrar que um sistema de Hamilton generalizado (**SHG**) é equivalente a um sistema de Hamilton usual (**SH**) definido um espaço de fase $\Gamma^{*2(n-m)}$. Isto é um **SHG** é equivalente a um **SH** com $n-m$ graus de liberdade.

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

O **SH** Γ^* pode ser construído da maneira seguinte. Sejam m condições

$$\chi^\alpha(p,q) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

que satisfaçam

$$\{\chi^\alpha, \chi^\beta\} = 0$$

e

$$\det \left| \{\varphi^\alpha, \chi^\beta\} \right| \neq 0$$

Então o subespaço de Γ^{2n} definido pelas condições

$$\begin{cases} \chi^\alpha(p,q) &= \quad 0 \\ \varphi^\alpha(p,q) &= \quad 0 \end{cases} \qquad \alpha = 1, \ldots, m$$

é o espaço $\Gamma^{*2(n-m)}$ pretendido

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

As variáveis canónicas p^* e q^* em $\Gamma^{*2(n-m)}$ podem ser encontradas da maneira seguinte. Devido à condição $\{\chi^\alpha, \chi^\beta\} = 0$ podemos escolher as variáveis q_i em Γ^{2n} de tal forma que os χ^α coincidam com as primeiras m variáveis do tipo coordenada, isto é,

$$\underbrace{q}_{n} \equiv (\underbrace{\chi^\alpha}_{m}, \underbrace{q^*}_{n-m})$$

Sejam $p = (p^\alpha, p^*)$ os correspondentes momentos conjugados. Nestas variáveis a condição no determinante toma a forma

$$\det \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p^\beta} \right| \neq 0$$

portanto as condições $\varphi^\alpha(p, q) = 0$ podem ser resolvidas para p^α, isto é

$$p^\alpha = p^\alpha(p^*, q^*)$$

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

O subespaço Γ^* é portanto definido pelas condições

$$\begin{cases} \chi^\alpha & \equiv \quad q^\alpha = 0 \\ p^\alpha & = \quad p^\alpha(p^*, q^*) \end{cases}$$

As variáveis p^* e q^* são canónicas e o Hamiltoniano é dado por

$$h^*(p^*, q^*) = h(p, q)\,\Big|_{(\chi=0\ ;\ \varphi=0)}$$

e as equações de movimento são agora

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h^*}{\partial p^*} \qquad \dot{p}^* = -\frac{\partial h^*}{\partial q^*}$$

num total de $2(n-m)$ equações.

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

O resultado fundamental pode ser enunciado na forma dum teorema.

> *As duas representações são equivalentes, isto é, conduzem às mesmas equações de movimento*

Dem:
As relações $q^\alpha = 0 \Longrightarrow \dot{q}^\alpha = 0$ ou seja na descrição (p, q)

$$\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} + \lambda^\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_\alpha} = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

Consideremos agora as equações de movimento para as coordenadas q^* nas duas representações

$$\dot{q}^* \quad = \quad \frac{\partial h}{\partial p^*} + \lambda^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*}$$

$$\dot{q}^* \quad = \quad \frac{\partial h^*}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \frac{\partial h}{\partial p^\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*}$$

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

As duas equações serão equivalentes se

$$\lambda^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*}$$

ou seja usando as relações anteriores

$$\lambda^\alpha \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial p^*} \right) = 0$$

Ora esta relação é verdadeira em virtude da ligação $\varphi_\alpha = 0$. Portanto as duas representações são equivalentes o que demonstra o teorema (as equações para as variáveis p^* tratavam-se de modo semelhante).
Para efectuar a quantificação destes sistemas podemos usar as expressões para o operador evolução em termos dum integral de caminho nas variáveis (p^*, q^*) pois estas formam um sistema Hamiltoniano normal. Temos

$$U(q_f^*, q_i^*) = \int \prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)} e^{i \int [p^* \dot{q}^* - h(p^*, q^*)] dt}$$

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

Embora este seja um modo possível de proceder à quantificação, não é o mais conveniente em muitas situações onde é difícil inverter as relações $\varphi^\alpha = 0$ para obter $p^\alpha = p^\alpha(p^*, q^*)$. Será mais conveniente usar as variáveis (p, q) com restrições apropriadas. Isto pode ser feito facilmente substituindo

$$\prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)} \to \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \prod_t \delta(q^*)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*))$$

Então

$$U(q_f, q_i) = \int \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \prod_t \delta(q^\alpha)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*))e^{i\int dt(p\dot{q} - h(p,q))}$$

Esta expressão pode ainda ser escrita em termos das ligações se recordarmos que

$$\delta(q^\alpha) = \delta(\chi^\alpha)$$

$$\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) = \delta(\varphi^\alpha) \det \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} \right|$$

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

Então

$$\prod_t \delta(q^\alpha)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) = \prod_t \delta(\varphi^\alpha)\delta(\chi^\alpha) \det |\{\varphi_\alpha, \chi_\beta\}|$$

Finalmente se usarmos a identidade

$$\delta(\varphi^\alpha) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\int dt \lambda^\alpha \varphi_\alpha}$$

obtemos

$$U(q_f, q_i) = \int \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \prod_{t,x} \delta(\chi^\alpha) \det |\{\varphi^\alpha, \chi_\beta\}| \, e^{iS(p,q,\lambda)}$$

onde

$$S(p, q, \lambda) = \int [p\dot{q} - h(p, q) - \lambda\varphi] dt$$

Systems with n degrees of freedom $\cdots$

Será esta expressão

$$U(q_f, q_i) = \int \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \prod_{t,x} \delta(\chi^\alpha) \det |\{\varphi^\alpha, \chi_\beta\}| \, e^{iS(p,q,\lambda)}$$

que iremos aplicar às teorias de gauge. Notar que a expressão dentro do parêntesis recto é precisamente a do Lagrangeano para sistemas de Hamilton generalizados

$$L = p\dot{q} - h(p,q) - \lambda\varphi$$

Pode-se mostrar que os *resultados físicos* não dependem da escolha das condições auxiliares $\chi^\alpha = 0$. Em teorias de gauge, fala-se da *escolha de gauge*.

QED as a simple example

Consideremos o campo electromagnético acoplado a uma corrente conservada $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, $\partial_\mu J^\mu = 0$. O Lagrangeano é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

A acção pode ser escrita na seguinte forma equivalente (formalismo de 1ª ordem)

$$S = \int d^4x \left[-\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} A^0 + \dot{\vec{A}}) - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} + \frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{2} - \rho A^0 + \vec{J} \cdot \vec{A} \right]$$

As equações do movimento são, variando em ordem a $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E} & = & -(\vec{\nabla} A^0 + \dot{\vec{A}}) \\ \vec{B} & = & \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} & = & -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

QED as a simple example · · ·

Variando em ordem a A^0 e $\vec{A}$,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \end{cases}$$

Se substituirmos $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ obtemos, depois de uma integração por partes,

$$S = \int d^4x \left\{ -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \left(\frac{\vec{E}^2 + (\vec{\nabla} \times A)^2}{2} - \vec{J} \cdot \vec{A} \right) + A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho) \right\}$$

- É claro que A^0 desempenha o papel dum multiplicador de Lagrange.
- As variáveis canónicas são $\vec{A}$ e $\vec{E}$ mas elas não são livres pois existe uma ligação que tem que ser respeitada, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$. Esta ligação é linear nos campos. Aqui reside a grande simplificação do electromagnetismo.
- Se escolhermos uma condição de gauge também linear então o $\det\{\varphi^\alpha, \chi_\beta\}$ não dependerá de $\vec{E}$ e $\vec{A}$ e será uma constante que apenas afectará a normalização.

QED as a simple example · · ·

Uma tal condição de gauge é obtida, por exemplo, da forma seguinte (*gauge de Lorentz*)

$$\chi = \partial_\mu A^\mu - c(\vec{x}, t)$$

onde $c(\vec{x}, t)$ é uma função arbitrária. Então é fácil de ver que a expressão para o funcional gerador das funções de Green é (o termo vindo de $\det\{\varphi^\alpha, \chi_\beta\}$ é absorvido na normalização)

$$Z[J^\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(\vec{E}, \vec{A}, A^0) \prod_x \delta(\partial_\mu A^\mu - c(x)) e^{iS}$$

onde

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left\{ -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \left[\frac{E^2 + (\vec{\nabla} \times A)^2}{2} + (\vec{J} \cdot \vec{A}) \right] + A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{E^2}{2} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} A^0 + \dot{\vec{A}}) - \frac{(\vec{\nabla} \times A)^2}{2} - J_\mu A^\mu \right\} \end{aligned}$$

QED as a simple example · · ·

A integração em $\vec{E}$ é gaussiana e pode ser imediatamente efectuada obtendo-se (mantemos a designação $\mathcal{N}$ embora seja diferente depois da integração)

$$Z[J\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_x \delta(\partial_\mu A^\mu - c(x)) e^{iS}$$

onde agora

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - J_\mu A^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right] \end{aligned}$$

Como as funções $c(x)$ são arbitrárias podemos integrar sobre elas com um peso

$$\exp\left(-\frac{1}{2\xi} \int d^4x c^2(x) \right)$$

Obtemos então o resultado familiar

$$Z[J^\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 - J \cdot A \right]}$$

- Como veremos adiante se tivéssemos escolhido uma condição de gauge não linear, o $\det |\{q, \chi\}|$ já dependeria de $\vec{E}$ ou $\vec{A}$ e não teria sido possível absorvê-lo na normalização (que é irrelevante pois escolhemos sempre a normalização de forma que $Z[0] = 1$) .
- Nesse caso será necessário utilizar os métodos das teorias de gauge não abelianas que vamos estudar na próxima secção.

Non abelian gauge theories. Non covariant gauges

Vimos anteriormente que a acção para as teorias de gauge não abelianas (TGNA), se podia escrever na forma

$$S = -2\int d^4x \,\text{Tr}\left[\underset{\sim}{\vec{E}} \cdot \partial^0 \underset{\sim}{\vec{A}} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\vec{E}}^{\,2} + \underset{\sim}{\vec{B}}^{\,2}) - \underset{\sim}{A}^{0}(\vec{\nabla}\cdot \underset{\sim}{\vec{E}} + g[\underset{\sim}{\vec{A}}, \underset{\sim}{\vec{E}}])\right] \tag{1}$$

$$= \int d^4x \left[-E_k^a \partial^0 A_k^a - \mathcal{H}(E_k, A_k) + A^{0a} C^a\right] \tag{2}$$

onde

$$C^a = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c$$

Se introduzirmos os parêntesis de Poisson a tempo igual

$$\left\{-E_a^i(x), A_b^j(y)\right\}_{x^0=y^0} = \delta^{ij}\delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

é fácil mostrar que

$$\left\{C^a(x), C^b(y)\right\}_{x_0=y_0} = -g f^{abc} C^c(x) \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{H, C^a(x)\} = 0$$

onde

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(E_k, A_k) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(E^{ka})^2 + (B^{ka})^2 \right]$$

Assim as teorias de gauge não abelianas representam um exemplo de sistemas da Hamilton generalizados. As variáveis do género coordenada são A_k^a, os momentos conjugados são $-E_k^a$. As variáveis A^{0a} são multiplicadores de Lagrange para garantir as ligações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c = 0$$

que são parte das equações de movimento.

Non abelian gauge theories. Non covariant gauges $\cdots$

- Para procedermos à quantificação podemos usar o formalismo para **SHG**. Temos para isso que impor r condições auxiliares (r é a dimensão do grupo de Lie), isto é, tantas como as condições de ligação $C^a(x) = 0$, $a = 1, \ldots, r$.

- Escolher estas condições é aquilo que se chama escolher, ou fixar, a gauge. Esta escolha é arbitrária, os resultados físicos não devem depender dela. No entanto expressões intermédias como sejam, por exemplo, as regras de Feynman, dependem fortemente da gauge.

- Como vimos no exemplo do electromagnetismo se for possível fixar uma condição de gauge linear nas variáveis dinâmicas, $\vec{A}^a$ e $\vec{E}^a$, então a expressão do integral de caminho simplifica-se bastante devido ao facto do determinante não depender dessas variáveis e poder ser absorvido numa constante de normalização. Uma gauge em que isto é possível é a chamada gauge axial que passaremos a estudar.

Non abelian gauge theories. Axial Gauge

- É sempre possível efectuar uma transformação de gauge tal que a componente de $\vec{A}^a$ segundo uma direcção espacial seja nula em todos os pontos, isto é, escolhendo a direcção segundo o eixo dos zz

$$A^{3a} = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r$$

- Estas r condições constituem as nossas condições auxiliares necessárias para se proceder à quantificação da teoria. A vantagem desta escolha de gauge é a seguinte. Se calcularmos $\{C^a, A^{3b}\}$ obtemos

$$\begin{aligned}\{C_a(x), A_b^3(y)\} &= \{\partial_k E_a^k(x), A_b^3(y)\} - g f_{adc} A_d^k \{E_c^k(x), A_b^3(y)\} \\ &= -g\ \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x^3} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{\delta}{\delta \alpha^a(x)} (\delta A_b^3(y))\end{aligned}$$

onde se usou o facto de $A_b^3 = 0$. Vemos assim que $\{C^a, A_b^3\}$ não depende de $\vec{A}_a$ e $\vec{E}_a$ e o determinante que aparece na expressão do integral de caminho pode ser absorvido na normalização.

Non abelian gauge theories. Gauge Axial

Podemos assim escrever para o funcional gerador das funções de Green

$$Z[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(\vec{E}, \vec{A}, A^0) \prod_x \delta(A^3) e^{iS(\vec{E},\vec{A},A^0,J^\mu)}$$

onde

$$S(\vec{E}, \vec{A}, A^0, J^\mu) = \int d^4x \left[-\vec{E}^a \cdot \partial^0 \vec{A}^a - \frac{1}{2}\left[(\vec{E}^a)^2 + (\vec{B}^a)^2 \right] + A^{0a} C^a + A^a \cdot J^a \right]$$

e

$$C^a = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c$$

Como a integração em $\vec{E}$ aparece na forma duma integração gaussiana obtemos facilmente

$$Z_A[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(A^\mu) \prod_x \delta(A^3) e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}(x) + A^a \cdot J^a\right]}$$

Non abelian gauge theories. Gauge Axial

- O Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu})$$

O índice A em $Z_A[J^{\mu a}]$ realça o facto deste funcional corresponder à escolha de gauge axial.

- Embora a expressão para o funcional gerador se escreva facilmente nesta gauge ela tem a desvantagem das regras de Feynman não serem covariantes. Antes de introduzirmos as gauge covariantes mostraremos ainda outra gauge não covariante a chamada gauge de Coulomb

Esta gauge é definida pelas condições auxiliares

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r$$

Estas condições auxiliares têm um parêntesis de Poisson não trivial com as ligações $C^a(x)$. De facto (ver problema 2.3)

$$\delta \vec{A}_a = -\frac{1}{g} \int d^3y \left\{ \vec{A}_a(x), \alpha^b(y) C_b(y) \right\}_{x_0=y_0}$$

logo

$$\left\{ \vec{A}_a(x), C_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = -g \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} (\delta \vec{A}_a(x))$$

e

$$\left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a(x), C_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = -g \frac{\delta}{\delta \alpha_b(y)} \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{A}_a(x))$$

Non abelian gauge theories. Coulomb Gauge

Como

$$\delta \vec{A}_a(x) = \frac{1}{g}\vec{\nabla}\alpha_a(x) + f_{abc}\alpha^b(x)\vec{A}^c(x)$$

obtemos (com a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a = 0$)

$$-g\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{A}_a(x)) = -\nabla_x^2 \alpha_a(x) - g f_{abc}\vec{A}_c(x) \cdot \vec{\nabla}\alpha_b(x)$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\left\{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a(x), C_b(y)\right\} &= \left[-\nabla_x^2 \delta_{ab} - g f_{abc}\vec{A}_c(x) \cdot \vec{\nabla}_x\right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &\equiv \mathcal{M}^c_{ab}(x, y)\end{aligned}$$

Non abelian gauge theories. Gauge de Coulomb

❒ Como $\det \mathcal{M}$ embora dependendo de $\vec{A}$ não depende de $\vec{E}$, a integração gaussiana em $\vec{E}$ pode ainda ser feita e obtemos

$$Z_C[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_x [\det \mathcal{M}_C \prod_x \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + A^a \cdot J^a]}$$

❒ Agora não é possível absorver $\det \mathcal{M}_C$ na normalização. As regras de Feynman que podem ser obtidas a partir de $Z_C[J^\mu]$ também não são covariantes.

Non abelian gauge theories in covariant gauges

- As condições de gauge escolhidas até aqui (gauge axial e gauge de Coulomb) conduzem a regras de Feynman onde a covariância de Lorentz é perdida. Claro que os resultados finais não devem depender desta escolha, mas a não covariância dos cálculos intermédios é normalmente uma complicação.

- Vamos aqui generalizar os resultados anteriores a gauges covariantes. O método a seguir surgirá como um subproduto da resposta a um outro problema: Como mostrar a equivalência das gauges axial e de Coulomb?

- Para o argumento que se segue é conveniente trabalhar com quantidades invariantes de gauge. Assim em vez do funcional $Z_A[J^\mu]$ vamos por agora considerar o integral $Z_A[J=0]$ que como vimos tem o significado duma amplitude transição vácuo $\to$ vácuo na ausência das fontes exteriores,

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta(A^{3a}(x)) \exp\{iS[A_\mu]\}$$

onde $S[A_\mu]$ é a acção.

Non abelian gauge theories in covariant gauges · · ·

Numa transformação de gauge

$$\underset{\sim}{A}_\mu \to \underset{\sim}{A}'_\mu = {}^g\underset{\sim}{A}_\mu = U(g)\underset{\sim}{A}_\mu U^{-1}(g) - \frac{i}{g}\partial_\mu U U^{-1}$$

A acção $S[A_\mu]$ e a medida $\mathcal{D}(A_\mu)$ são invariantes, pelo que obtemos

$$Z_A(J=0) = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta({}^gA^{3a}(x)) \exp\{iS[A_\mu]\} \ .$$

Definimos agora o funcional $\Delta_C[A_\mu]$ através da relação

$$\Delta_C^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^g\vec{A}^a)$$

onde $\mathcal{D}(g)$ representa o produto infinito de medidas invariantes para o grupo G em cada ponto, isto é

$$\mathcal{D}(g) = \prod_x dg(x) \ .$$

Non abelian gauge theories in covariant gauges $\cdots$

A invariância da medida da integração do grupo G, $\mathcal{D}g' = \mathcal{D}(gg')$ tem como consequência que Δ_C é invariante de gauge. De facto

$$\begin{aligned}
\Delta_C^{-1}({}^g\!A_\mu) &= \int \mathcal{D}(g') \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g'}{}^g\!\vec{A}^a) \\
&= \int \mathcal{D}(g'g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g'}{}^g\!\vec{A}^a) \\
&= \Delta_C^{-1}[A_\mu]
\end{aligned}$$

Introduzimos agora na expressão de $Z_A[J=0]$ a identidade

$$1 = \Delta_C[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^g\!\vec{A}^a)$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} Z_A(J=0) &= \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \prod_{x,a} \delta\left(A^{3a}(x)\right) \Delta_C[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{y,b} \delta(\vec{\nabla}\cdot {}^g\vec{A}^b) \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \Delta_C[A_\mu] \prod_{y,b} \delta\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}^b\right) \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta({}^{g^{-1}}A^{3a}) \end{aligned}$$

onde usámos a invariância de $\mathcal{D}$, $S[A_\mu]$ e $\Delta_C[A_\mu]$. Como a medida é invariante podemos escrever no último integral $g^{-1} \to g g_0$. Então

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g^{-1}}A^{3a}(x)\right) = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{gg_0}A^{3a}(x)\right)$$

onde g_0 é a transformação de gauge que leva da gauge $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ para a gauge $A'^3 = 0$, isto é

$$A'^3 = {}^{g_0}A^3 = 0$$

com $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$.

Non abelian gauge theories in covariant gauges $\cdots$

Falta-nos portanto calcular o integral sobre o grupo que agora se escreve

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g}\!A'^{3a}(x)\right)$$

com $A'^{3a} = 0$. Como $A'^{3a} = 0$ basta considerar transformações infinitesimais, na vizinhança da identidade,

$$g(x) = e - i\underset{\sim}{\alpha}(x) = e - i\alpha^a(x)t^a$$

onde $\alpha^a(x)$ são infinitesimais. Nestas condições a medida de integração $dg(x)$ vem dada por

$$dg(x) = \prod_a d\alpha^a(x)$$

Por outro lado em primeira ordem em α^a temos

$${}^{g}\!A'^{3a}(x) = \frac{1}{g}\,\frac{\partial\alpha^a}{\partial x^3}$$

Non abelian gauge theories in covariant gauges $\cdots$

pelo que o integral virá

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta \left({}^{g}A'^{3a}(x) \right) = \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \alpha^a}{\partial x^3} \right) = \mathcal{N}$$

O integral é independente de A_μ pelo que pode ser absorvido na normalização. Obtemos assim

$$Z_A[J=0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_C[A_\mu] \prod_x \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) e^{iS[A_\mu]}$$

Na secção anterior obtivemos uma expressão para $Z_C[J=0]$, que é

$$Z_C[J=0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_x \det \mathcal{M}_C \prod_x \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) e^{iS[A_\mu]}$$

Portanto para mostrar a equivalência dos integrais representando a amplitude *vácuo* $\rightarrow$ *vácuo* na ausência de fontes exteriores nas duas gauges consideradas falta-nos mostrar que $\Delta_C[A_\mu] = \det \mathcal{M}_C$.

Non abelian gauge theories in covariant gauges · · ·

De facto

$$
\begin{aligned}
\Delta_C^{-1}[A_\mu] &= \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(\vec{\nabla}\cdot {}^g\!\vec{A}^a\right) \\
&= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{g}\vec{\nabla}\alpha^a(x) + f^{abc}\alpha^b\vec{A}^c\right)\right] \\
&= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left(\frac{1}{g}\nabla_x^2\alpha^a(x) + f^{abc}\vec{\nabla}\alpha^b\cdot\vec{A}^c\right) \\
&\propto \det{}^{-1}\mathcal{M}_C
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_C^{ab}(x,y) &= -g\frac{\delta}{\delta\alpha^b(y)}\left(\vec{\nabla}\cdot {}^g\vec{A}^a\right)_{\alpha=0} \\
&= \left(-\nabla_x^2\delta_{ab} - g f^{abc}\vec{A}_c\cdot\vec{\nabla}_x\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}
$$

Non abelian gauge theories in covariant gauges $\cdots$

- Portanto $\Delta_C[A_\mu] \propto \det \mathcal{M}_C$ e à parte uma normalização irrelevante $Z_A[0] = Z_C[0]$.

- A maneira como se demonstrou a equivalência entre as gauges de Coulomb e axial sugere a forma de definir a amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* para uma gauge arbitrária definida pela condição

$$F^a[A_\mu] = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r$$

- Para isso definimos $\Delta_F[A_\mu]$ pela expressão

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^g\!A_\mu]\right)$$

e como anteriormente introduzimos

$$1 = \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^g\!A_\mu]\right)$$

na expressão para $Z_A[J=0]$.

Non abelian gauge theories in covariant gauges · · ·

Obtemos

$$\begin{aligned}
Z_A[J=0] &= \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta\left(A^{3a}(x)\right) e^{iS[A_\mu]} \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{y,b} \delta\left(F^b[{}^g A_\mu]\right) \\
&= \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{y,b} \delta\left(F^b[A_\mu]\right) \Delta_F[A_\mu] e^{iS[A_\mu]} \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g^{-1}} A^{3a}(x)\right) \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A_\mu] \prod_{x,a} \delta\left(F^b[A_\mu]\right) e^{iS[A_\mu]} \\
&= \mathcal{N} Z_F[J=0]
\end{aligned}$$

mostrando que as gauges axial e as gauges do tipo F são equivalentes. A amplitude *vácuo* $\rightarrow$ *vácuo* na gauge $F^a = 0$ é portanto dada por

$$Z_F[J=0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A_\mu] \prod_{x,a} \delta\left(F^a[A_\mu]\right) e^{iS[A_\mu]}$$

Non abelian gauge theories in covariant gauges $\cdots$

- Falta-nos calcular $\Delta_F[A_\mu]$. Como na definição anterior $\Delta_F[A_\mu]$ aparece multiplicado por $\prod \delta\left(F^a[A_\mu]\right)$, basta-nos conhecer $\Delta_F[A_\mu]$ para A_μ que satisfaz $F^a[A_\mu]=0$.

- Então para g perto da identidade obtemos

$$
\begin{aligned}
F^a[{}^g\!A^b_\mu] &= F^a[A^b_\mu] + \frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu}\delta A^b_\mu \\
&= -\frac{1}{g}\,\frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu}\left(D_\mu \alpha\right)^b
\end{aligned}
$$

onde se usou $F^a[A^b_\mu]=0$ e $\delta A^b_\mu = -\frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^b$. Calculemos então Δ_F. Obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1}_F[A_\mu] &= \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^g\!A^b_\mu]\right) \\
&= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left(-\frac{1}{g}\frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu}(D_\mu\alpha)^b\right) \\
&\propto \det{}^{-1}\mathcal{M}_F
\end{aligned}
$$

onde

$$\mathcal{M}_F^{ab}(x,y)=\frac{\delta F^a}{\delta A^c_\mu(x)}D^{cb}_\mu \delta^4(x-y)=-g\frac{\delta F^a[{}^g A(x)]}{\delta\alpha^b(y)}$$

e portanto

$$\Delta_F[A_\mu]=\det\mathcal{M}_F=\det\left(-g\frac{\delta F^a(x)}{\delta(\alpha^b(y))}\right)$$

Já sabemos como escrever a amplitude *vácuo* $\rightarrow$ *vácuo* na ausência de fontes exteriores para uma gauge arbitrária. No entanto não é esta quantidade a mais interessante, mas sim a amplitude *vácuo* $\rightarrow$ *vácuo* na presença de fontes, $Z_F[J]$ pois será esta que gera as funções de Green. Em toda a discussão até aqui se fizeram as fontes exteriores são nulas. A razão é que o termo das fontes, $\int d^4x J^a_\mu A^{\mu a}$, não é invariante de gauge.

- Se definirmos $Z_F[J^a_\mu]$ pela relação

$$Z_F[J^a_\mu] \equiv \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu] \prod_{x,a} \delta(F^a[A^b_\mu(x)])e^{i(S[A_\mu]+\int d^4x J^a_\mu A^{\mu a})}$$

  então é claro que os funcionais Z_F não serão equivalentes para diferentes escolhas de $F^a = 0$. Isto quer dizer que as funções de Green calculadas a partir de $Z_F[J^\mu]$ vão depender de gauge $F^a = 0$.

- Na secção seguinte mostraremos que embora as funções de Green dependam da escolha de gauge, este não é um problema importante porque os resultados fisicamente relevantes (mensuráveis) estão relacionados com os elementos da matriz S renormalizada e esta é independente da gauge conforme aí mostraremos.

- Antes de acabarmos esta secção façamos uma transformação no funcional $Z_F[J^a_\mu]$ para nos vermos livres da função δ que aí intervém. Para os cálculos é de toda a conveniência exponenciar $\prod \delta(F^a[A_\mu])$. Isto pode fazer-se do seguinte modo.

Non abelian gauge theories in covariant gauges · · ·

Definamos uma condição de gauge mais geral

$$F^a[A^b_\mu] - c^a(x) = 0$$

onde $c^a(x)$ são funções arbitrárias do espaço-tempo, mas não dependem dos campos. Então $\Delta_F[A]$ não vem alterado e escrevemos

$$Z_F[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu] \prod \delta(F^a[A_\mu] - c^a) e^{i(S[A_\mu]+\int d^4x J^a_\mu A^\mu)}$$

O lado esquerdo da equação não depende de $c^a(x)$ pelo que podemos integrar em $c^a(x)$ com um peso conveniente, especificamente com

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\; c_a^2(x)\right\}$$

onde x é um parâmetro real.

Non abelian gauge theories in covariant gauges · · ·

- Obtemos então

$$
\begin{aligned}
Z_F[J^a_\mu] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu] e^{i\left(S[A_\mu]+\int d^4x\left(-\frac{1}{2}F_a^2+J^{\mu a}A^a_\mu\right)\right)} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu] e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2}F_a^2+J^{\mu a}A^a_\alpha]}
\end{aligned}
$$

- Esta expressão é o ponto de partida para o cálculo das funções de Green numa gauge arbitrária definida pela função F^a. Para sermos capazes de estabelecer as regras de Feynman para esta teoria teremos ainda de exponenciar $\Delta_F[A_\mu]$. Isto será feito numa das secções seguintes com a introdução dos chamados *fantasmas* de Fadeev-Popov.

Lecture 10

Gauge invariance of the S matrix

- Na secção anterior definimos o funcional gerador das funções de Green $Z_F[J^a_\mu]$, para uma gauge dada pela função $F^a[A^b_\mu]$, através da relação

$$Z_F[J^a_\mu] \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A] \prod_{x,a} \delta(F^a[A^b_\mu(x)]) e^{i(S[A_\mu]+\int d^4x J^a_\mu A^{\mu a})}$$

  e mostrámos a equivalência das diferentes gauges quando as fontes eram nulas. Vamos agora mostrar o que acontece quando $J^a_\mu \neq 0$. Para isso vamos refazer a demonstração da equivalência entre duas gauges na presença das fontes.

- Escolhemos para esta demonstração as gauges de Coulomb e Lorentz definidas por

$$\begin{cases} F^a = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a & \textit{gauge de Coulomb} \\ F^a = \partial_\mu A^{\mu a} & \textit{gauge de Lorentz} \end{cases}$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

- Definimos então os funcionais geradores $Z_C[j^a_\mu]$ e $Z_L[J^a_\mu]$ por

$$Z_C[j^a_\mu] \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_c[A] \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a) e^{i(S[A]+\int d^4x j^a_\mu A^{\mu a})}$$

e

$$Z_L[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_L[A] \prod_{x,a} \delta(\partial_\mu A^{\mu a}) e^{i(S[A]+\int d^4x J^a_\mu A^{\mu a})}$$

- Vamos mostrar a relação entre eles. Seguindo os métodos da secção anterior introduzimos em $Z_C[j^a_\mu]$ a identidade dada por

$$1 = \Delta_L[A] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} (\partial_\mu {}^g A^{\mu a})$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

Obtemos

$$
\begin{aligned}
&Z_C[j^a_\mu] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_C[A] \textstyle\prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}^a) e^{i(S[A]+\int d^4x j^a_\mu A^{\mu a})} \Delta_L[A] \int \mathcal{D}(g) \prod_{y,b} \delta(\partial_\mu\, {}^g\!A^{\mu a}) \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \textstyle\prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} \Delta_C[A] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla}\cdot\, {}^{g^{-1}}\!\vec{A}^a) e^{i\int d^4x j^a_\mu\, {}^{g^{-1}}\!A^{\mu a}} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \textstyle\prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} \Delta_C[A] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla}\cdot\, {}^{gg^0}\!\vec{A}^a) e^{i\int d^4x j^a_\mu\, {}^{gg^0}\!A^{\mu a}}
\end{aligned}
$$

onde g^0 é a transformação de gauge que leva de gauge $\partial_\mu A^{\mu a} = 0$ para a gauge $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'^a = 0$, $\vec{A}'^a = {}^{g^0}\!\vec{A}$ e é portanto obtida resolvendo a equação

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\left[U(g^0)\vec{A}U^{-1}(g^0) - \frac{i}{g}\vec{\nabla}U(g^0)U^{-1}(g^0)\right] = 0
$$

onde $\partial_\mu A^{\mu a} = 0$. Devido ao factor $\prod_x \delta(\vec{\nabla}\cdot\, {}^g\!\vec{A}')$ só nos interessam as transformações g infinitesimais pelo que

$$
Z_C[j^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} e^{i\int d^4x j^a_\mu\, {}^{g^0}\!A^\mu}
$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

onde se usou o resultado

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \ {}^g\!\vec{A}') = \Delta_C^{-1}[A] \ .$$

Para comparar com $Z_L[J_\mu^a]$ é necessário escrever ${}^{g^0}\!A^\mu$ em função de A^μ, resolvendo a equação para g^0. Isto pode ser feito formalmente em série de potenciais de A^μ. É fácil de ver que devemos ter

$$A'_i = \left(\delta_{ij} - \nabla_i \frac{1}{\nabla^2} \nabla_j\right) A_j + O(A_\lambda^2)$$

Se restringirmos a fonte na gauge de Coulomb a ser transversal $j^0 = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ podemos então escrever

$$Z_C[j_\mu^a] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A] + \int d^4x F_\mu^a j^{\mu a}}$$

onde $F_\mu^C[A] = A_\mu^a + O(A_\lambda^2)$.

Comparando com a expressão de $Z_L[J^a_\mu]$ obtemos finalmente

$$Z_C[j^a_\mu] = \exp\left\{ i \int d^4x j^a_\mu F^{\mu a}\left[\frac{\delta}{i\delta J^b}\right]\right\} Z_L[J^a_\mu]$$

Esta é a expressão que relaciona Z_C com Z_L. Como $F_\mu[A]$ é um funcional complicado é fácil de ver que as funções de Green nas duas gauges vão ser diferentes. Mas o que tem significado físico (comparável com a experiência) são os elementos de matriz S renormalizada. O teorema da equivalência que a seguir demonstramos mostra que a matriz S renormalizada é invariante de gauge. Por simplicidade demonstraremos o teorema para a teoria $\lambda\phi^4$ mas o raciocínio é análogo para o caso das teorias de gauge.

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem

- **Teorema**

Se dois funcionais geradores Z e $\tilde{Z}$ diferem somente nos termos das fontes exteriores então eles conduzem à mesma matriz S renormalizada.

- **Dem.** Consideremos o funcional gerador das funções de Green

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(\phi) e^{i(S[\phi]+\int d^4x J\phi)}$$

onde

$$S[\phi] + \int d^4x J\phi = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right] .$$

Que acontece se acoplarmos a fonte exterior a $\phi + \phi^3$ em vez de ser somente a ϕ ?

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

Podemos escrever o funcional gerador $\tilde{Z}[j]$ dado por

$$\tilde{Z}[j] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(\phi) e^{i[S[\phi] + \int d^4x j(\phi + \phi^3)]}$$

e podemos escrever $\tilde{Z}[j]$ em termos de $Z[J]$,

$$\tilde{Z}[j] = \exp\left\{ i \int d^4x j(x) F\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\right\} Z[J]$$

onde $F[\phi] = \phi + \phi^3$. Consideremos a função de 4-pontos, $\tilde{G}(1,2,3,4)$ gerada por $\tilde{Z}[j]$

$$\tilde{G}(1,2,3,4) = (-i)^4 \frac{\delta^4 \tilde{Z}[j]}{\delta j(1) \delta j(2) \delta j(3) \delta j(4)}$$

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

Um diagrama típico que contribui para $\tilde{G}(1,2,3,4)$ é o da Figura 1, onde a parte do diagrama dentro do quadrado a tracejado é uma função de Green gerada por $Z[J]$.

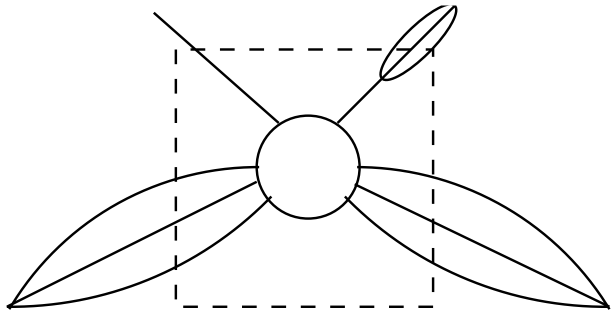
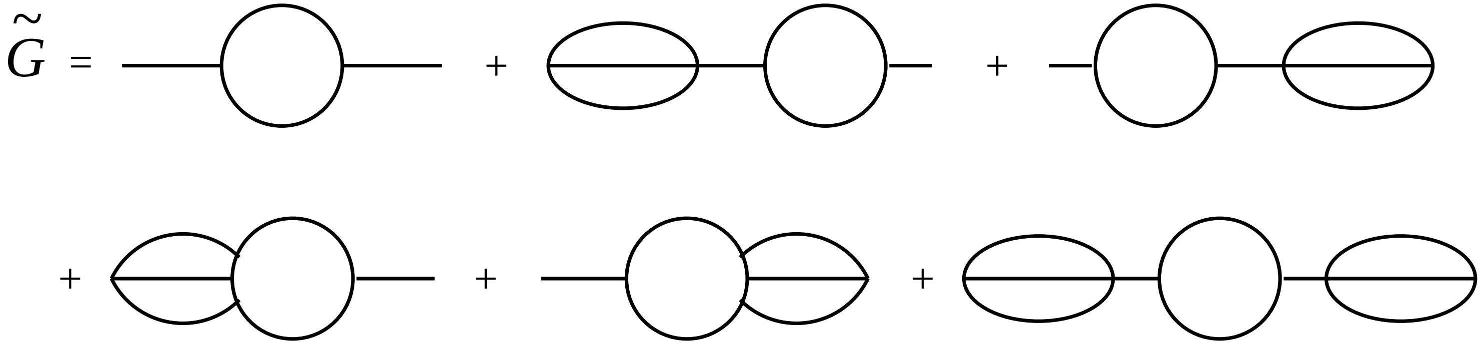


Figure 1: Green functions generated by $Z[J]$ and $\tilde{Z}[j]$.

Consideremos agora os propagadores $\tilde{G}(1,2)$ e $G(1,2)$ gerados por $\tilde{Z}[j]$ e $Z[J]$ respectivamente. Obtemos a seguinte expansão de $\tilde{G}(1,2)$ em termos de $G(1,2)$

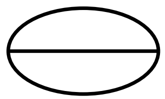
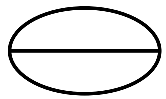


Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

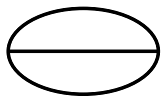
Se examinarmos os propagadores junto do pólo na massa física, obtemos (Z_2 e $\tilde{Z}_2$ são as constantes de renormalização nos dois esquemas)

$$\lim_{p^2 \to m_R^2} \tilde{G} = \frac{i\tilde{Z}_2}{p^2 - m_R^2} \qquad ; \qquad \lim_{p^2 \to m_R^2} G = \frac{iZ_2}{p^2 - m_R^2}$$

Então multiplicando a expansão anterior por $p^2 - m_R^2$ e tomando o limite $p^2 \to m_R^2$ obtemos

$\tilde{Z}_2 = Z_2 \Big[1 + 2$  $+ \Big($  $\Big)^2 + \cdots \Big]$

ou seja

$\sigma \equiv \left(\dfrac{\tilde{Z}_2}{Z_2} \right)^{1/2} = 1 +$  $+ \cdots$

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

A matriz S não renormalizada é dada por

$$S^{\rm NR}(k_1,\ldots,k_n)=\prod_{i=1}^{n}\lim_{k_i^2\to m_R^2}(k_i^2-m_R^2)G(k_1,\ldots,k_n)$$

para as funções de Green calculadas a partir de $Z[J]$. Definimos de igual modo

$$\tilde{S}^{\rm NR}(k_1,\ldots,k_n)=\prod_{i=1}^{n}\lim_{k_i^2\to m_R^2}(k_i^2-m_R^2)\tilde{G}(k_1,\ldots,k_n)$$

para as funções de Green calculadas a partir do funcional $\tilde{Z}[j]$, sendo n o número de partículas exteriores. Do argumento usado para relacionar $\lim(k^2-m_R^2)\tilde{G}(k_1,\ldots,k_n)$ com $\lim(k^2-m_R^2)G(k_1,\ldots,k_n)$ é fácil de ver que para relacionar $\prod\lim(k_i^2-m_R^2)\tilde{G}$ com $\prod\lim(k_i^2-m_R^2)G$ somente contribuem os diagramas que tiverem pólos em todas as variáveis k_i^2.

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

Então

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2)\tilde{G} &= \left(\frac{Z}{\tilde{Z}}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) G \\
&= \sigma^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) G
\end{aligned}
$$

Portanto obtemos uma relação entre os elementos da matriz S não normalizada

$$
\tilde{S}^{\,\mathrm{NR}} = \sigma^{\frac{n}{2}} S^{\,\mathrm{NR}}
$$

ou ainda

$$
\frac{1}{\tilde{Z}^{\frac{n}{2}}} \tilde{S}^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n) = \frac{1}{Z^{\frac{n}{2}}} S^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n)
$$

Gauge invariance of the S matrix: Equivalence Theorem $\cdots$

Mas $\frac{1}{Z^{\frac{n}{2}}} S^{\rm NR}(k_1, \ldots, k_n)$ é precisamente a definição da matriz S renormalizada pelo que

$$\tilde{S}^{\rm R} = S^{\rm R} \; .$$

Concluímos assim que dois funcionais geradores que defiram pelo acoplamento à fonte exterior produzem os mesmos elementos de matriz da matriz S renormalizada. Isto completa a demonstração do teorema da equivalência.
A aplicação deste resultado ao nosso caso é agora imediata pois

$$Z_C[j^a_\mu] = \exp\left\{ i \int d^4x j^a_\mu F^{\mu a}\left[\frac{\delta}{i\delta J_x}\right]\right\} Z_L[J^c_\mu]$$

onde $F^a_\mu[A] = A^a_\mu + O(A^2_\lambda)$. A diferença entre $Z_C[j_\mu]$ e $Z_L[J_\mu]$ reside no acoplamento à fonte exterior, pelo que embora as funções de Green dependam da gauge, a matriz S renormalizada deverá ser invariante.

Fadeev-Popov ghosts

Tendo demonstrado a invariância de gauge de matriz S renormalizada, voltemos ao funcional gerador numa gauge arbitrária definida pela condição $F^a[A^b_\mu]$. Escrevemos este funcional na forma

$$Z_F[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A] e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi}(F^a)^2 + J^a_\mu A^{\mu a}]}$$

onde

$$\Delta_F[A] = \det \mathcal{M}_F = \det\left(-g\frac{\delta F^a(x)}{\delta\alpha^b(y)}\right)$$

Nesta forma as regras de Feynman são complicadas porque o $\det\mathcal{M}_F$ conduz a interacções não locais entre os campos de gauge. Se de alguma forma pudéssemos exponenciar $\det\mathcal{M}_F$ e metê-lo numa acção efectiva teríamos o nosso problema resolvido.

Fadeev-Popov ghosts $\cdots$

Ora no nosso estudo dos integrais gaussianos sobre variáveis de Grassman obtivemos o resultado

$$\int \mathcal{D}(\overline{\omega},\omega) e^{-\int d^4x \overline{\omega} \mathcal{M}_F \omega} = \det \mathcal{M}_F$$

usando este resultado e mudando por conveniência $\mathcal{M}_F \to i\mathcal{M}_F$ (uma mudança na normalização irrelevante) obtemos

$$Z_F[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu, \overline{\omega}, \omega) e^{i\int d^4x [\mathcal{L}_{eff} + J^a_\mu A^{\mu a}]}$$

onde $\overline{\omega}$ e ω são campos escalares anticomutativos e o $\mathcal{L}_{eff}$ é definido por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G$$

Fadeev-Popov ghosts · · ·

- Os termos do Lagrangeano são

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (F^a)^2$$

$$\mathcal{L}_G = -\overline{\omega}^a \mathcal{M}^{ab}_F \omega^b$$

- Os campos ω e $\overline{\omega}$ são campos auxiliares não físicos e chamam-se *fantasmas de Fadeev-Popov*. Como não são físicos não há problema com o teorema que relaciona o spin com a estatística

- Calculemos agora duma forma mais explícita o Lagrangeano do fantasmas. Como

$$\mathcal{M}^{ab}_F(x,y) = -g \frac{\delta F^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \frac{\delta F^a[A(x)]}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cb}_\mu$$

Fadeev-Popov ghosts $\cdots$

Obtemos

$$\int d^4x d^4y \overline{\omega}^a(x) \mathcal{M}_F^{ab}(x,y) \omega^b(y) = \int d^4x \int d^4y \; \overline{\omega}^a(x) \frac{\delta F^a(x)}{\delta A_\mu^c(y)} D_\mu^{cb} \omega_b(y)$$

ou seja

$$\mathcal{L}_G(x) = -\int d^4y \; \overline{\omega}^a(x) \frac{\delta F^a(x)}{\delta A_\mu^b(y)} D_\mu^{bc} \omega_c(y)$$

Para termos uma forma mais explícita temos que especificar a gauge. Na gauge de Lorentz $F^a = \partial_\mu A^{\mu a}$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(x) &= -\int d^4y \overline{\omega}^a(x) \partial_x^\mu \left[\delta^4(x-y)\right] D_\mu^{ab} \omega^b(y) \\ &= \partial^\mu \overline{\omega}^a(x) D_\mu^{ab} \omega^b(x) \end{aligned}$$

onde se efectuou uma integração por partes e a derivada covariante na representação adjunta (os fantasmas, tal como os campos de gauge estão na representação adjunta do grupo G) é

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c$$

Feynman rules in the Lorenz gauge

Estamos agora em posição de escrever as regras de Feynman para calcular, em teoria das perturbações, qualquer processo que envolva partículas cujas interacções possam ser descritas por uma teoria de gauge não abeliana referente a um dado grupo de simetria. Todo o nosso trabalho até aqui se pode resumir na procura do Lagrangeano efectivo a partir do qual as regras de Feynman podem ser obtidas como se se tratasse duma teoria normal sem graus de liberdade a mais. O nosso Lagrangeano efectivo é, como vimos, dado por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G$$

onde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \qquad ; \qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu + g f^{bca} A^b_\mu A^c_\nu$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (F_a)^2$$

$$\mathcal{L}_G = -\overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu} D^{bc}_\mu \omega_c$$

Feynman rules in the Lorenz gauge . . .

As constantes f^{abc} são definidas pela comutação dos geradores do grupo, sendo as nossas convenções

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$$

$$Tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Para fixar ideias vamos considerar a gauge de Lorentz definida por

$$F^a[A] = \partial_\mu A^{\mu a}(x) \ .$$

Obtemos então

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \partial^\mu \overline{\omega}^a D^{ab}_\mu \omega^b$$

onde

$$D_\mu^{ab}\omega^b = (\partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c)\omega^b$$

e usámos o facto de que os fantasmas se encontram na representação adjunta pelo que

$$(D_\mu \omega)^a = \left(\partial_\mu \delta^{ab} - igA_\mu^c (T^c)^{ab}\right)\omega^b$$

com

$$(T^c)^{ab} \equiv -if^{bca} = -if^{abc}$$

Podemos escrever portanto

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{int}$$

Feynman rules in the Lorenz gauge ...

Onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cin} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a \\ &= \frac{1}{2} A^{\mu a}\left[\Box g_{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]\delta^{ab} A^{\nu b} - \overline{\omega}^a \Box\, \delta^{ab}\omega^b\end{aligned}$$

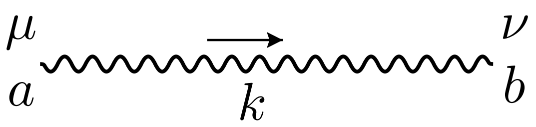
onde se desprezaram divergências totais. O Lagrangeano de interacção é

$$\mathcal{L}_{int} = -g f^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} + g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ .$$

Com as convenções usuais obtemos as seguintes regras de Feynman

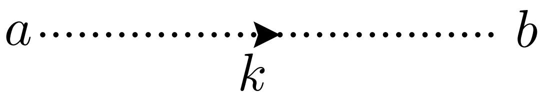
Propagadores:

i) Campos de gauge



$$-i\delta_{ab}\left[\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}-(1-\xi)\,\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right]$$

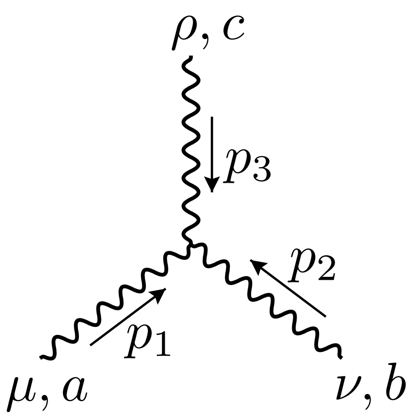
ii) Fantasmas



$$\frac{i}{k^2+i\epsilon}\,\delta_{ab}$$

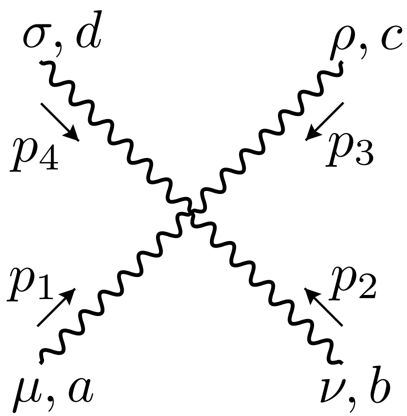
Vértices:

i) Vértice triplo dos bosões de gauge



$$-gf^{abc}\Big[\quad g^{\mu\nu}(p_1-p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2-p_3)^\mu$$
$$+g^{\rho\mu}(p_3-p_1)^\nu\Big]$$

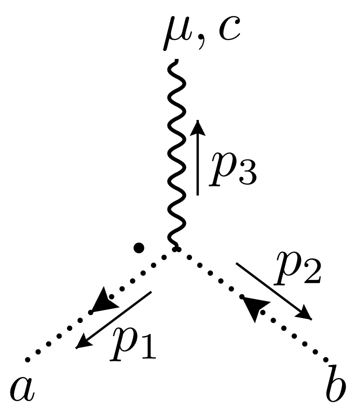
ii) Vértice quártico dos bosões de gauge



$$-ig^2\Big[\quad f^{eab}f^{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$
$$+f^{eac}f^{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})$$
$$+f^{ead}f^{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\Big]$$

Vértices:

iii) Interacção Fantasmas-Bosões de Gauge



$$g\ f^{abc} p_1^{\mu}$$

Notas:

1. O ponto no vértice entre os fantasmas e os bosões de gauge refere-se à perna que tem a derivada e que corresponde à linha de saída (as linhas dos fantasmas são orientadas)

2. As outras regras são as usuais não esquecendo o sinal $-$ por cada *loop* de fantasmas.

Feynamn rules for the interaction with matter

Na secção anterior vimos as regras de Feynman para a teoria de gauge pura, sem interacção com a matéria. A interacção com a matéria faz-se da forma habitual passando as derivadas usuais a derivadas covariantes. Em geral a matéria é descrita por partículas escalares

$$\phi_i \quad ; \quad i = 1, \ldots M$$

e partículas spinoriais

$$\psi_j \quad ; \quad j = 1, \ldots N$$

pertencendo a representações de dimensão M e N, respectivamente. O Lagrangeano será dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{matéria}} &= (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi - V(\phi) \\
&\quad + i\overline{\psi} D^\mu \gamma_\mu \psi - m_\psi \overline{\psi}\psi \\
&\equiv \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{int} \ .
\end{aligned}$$

Feynamn rules for the interaction with matter $\cdots$

O Lagrangeano de interacção entre a matéria e os campos de gauge obtém-se facilmente a partir da derivada covariante

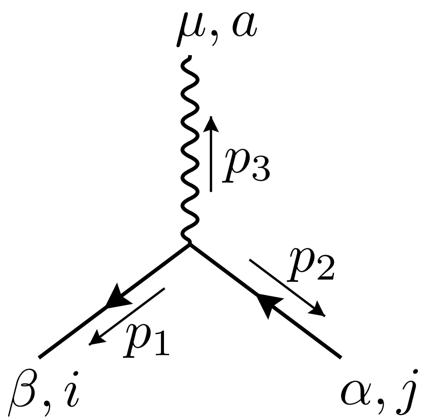
$$D^{\mu}_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} - igA^a_\mu T^a_{ij}$$

onde T^a_{ij} são os geradores nas representações adequadas para os campos ϕ e ψ. Assim obtemos

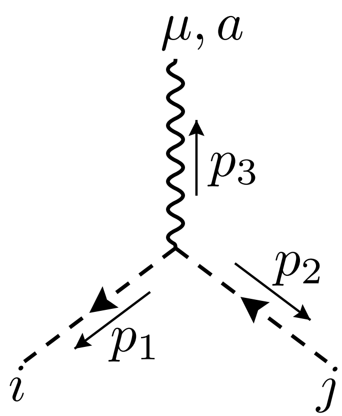
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} \quad &= \quad ig\phi^*_i(\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial})^\mu \phi_j T^a_{ij} A_{\mu a} + g^2 \phi^*_i T^a_{ij} T^b_{jk} \phi_k A^a_\mu A^{\mu b} \\ &\quad\quad + g\overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j T^a_{ij} A^a_\mu\end{aligned}$$

o que conduz aos seguintes vértices

Triple Vertices



$$ig(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} T^a_{ij}$$

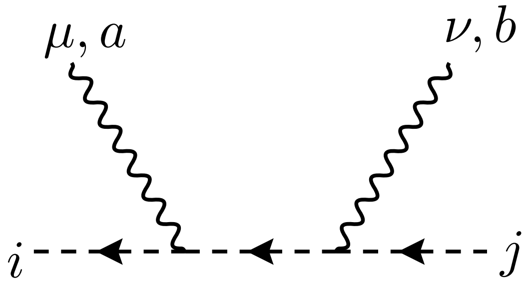


$$ig(p_1 - p_2)^\mu T^a_{ij}$$

Feynamn rules for the interaction with matter: Quartic vertices

Lecture 9
Classical theory
Quantization
Lecture 10
• S-Matrix
• Ghosts
• Feynman Rules
• FR with matter
Ward Identities
Lecture 11
Vacuum Polarization
S-Matrix
WT Identities in QED
Unitarity and WI

❒ Quartic Vertex



$T^a, T^b\}_{ij}$

❒ Factores do Grupo

Os factores f^{abc} e T^a_{ij} que aparecem nos vértices não precisam de facto de ser conhecidos. Nos cálculos aparecem, como veremos, combinações daqueles factores que podem ser expressas em termos de quantidades invariantes que caracterizam o grupo e a representação.

Os nossos geradores são hermitícos $(T^{a\dagger} = T^a)$ satisfazendo as relações

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$
$$Tr(T^a T^b) = \delta^{ab} T(R)$$

Feynamn rules for the interaction with matter: Group Factors

$T(R)$ é um número caracterizando a representação R. Outra quantidade frequentemente usada é o operador de Casimir da representação definido por

$$\sum_{a,k} T^a_{ik} T^a_{kj} = \delta_{ij} C_2(R)$$

Para a representação adjunta obtemos

$$f^{acd} f^{bcd} = \delta^{ab} C_2(G) \ .$$

$T(R)$ e $C_2(R)$ não são independentes obedecendo à relação

$$T(R) r = d(R) C_2(R)$$

onde r é a dimensão do grupo G e $d(R)$ é a dimensão da representação R.

Feynamn rules for the interaction with matter: Group Factors

- $SU(N)$

  Em muitas aplicações estamos interessados em grupos $SU(N)$. Para estes temos os seguintes resultados

$$r = N^2 - 1 \; ; \; d(N) = N \; ; \; d(adj) \equiv d(G) = r$$

$$T(N) = \frac{1}{2} \; ; \; C_2(N) = \frac{N^2-1}{2N}$$

$$T(G) = C_2(G) = N$$

- **Factores de Simetria**

  Para o cálculo de diagramas envolvendo partículas idênticas é necessário multiplicar o resultado de aplicar as regras de Feynman por um factor de simetria conveniente. Estes factores de simetria foram discutidos anteriormente . Por conveniência reproduzimos aqui a regra lá deduzida. O *factor de simetria* é o # de maneiras diferentes em que as linhas podem ser ligadas com o mesmo resultado topológico a dividir pelos factores permutacionais dos vértices e pelo número de permutações de pontos com vértices iguais.

BRS transformation

- Vamos aqui deduzir as *identidades de Ward* para as teorias de gauge não abelianas (descobertas por Ward, Takahashi, Slavnov e Taylor) . O método mais conveniente é o chamado método das transformações de Becchi, Rouet e Stora (BRS)

- As transformações de BRS são uma generalização das transformações de gauge que tornam invariante a acção efectiva.

- Como vimos para uma teoria de gauge não abeliana a acção efectiva é dada por ($A =$ campos de gauge ; $\phi =$ campos de matéria)

$$S_{eff}[A,\phi] = S[A,\phi] - \frac{1}{2\xi}\int d^4x F_a^2[A,\phi] - \int d^4x \overline{\omega}^a \mathcal{M}_{ab}\omega^b$$

onde $S[A,\phi]$ é a acção clássica, invariante para transformações de gauge

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= -\frac{1}{g} D_\mu^{ab}\alpha^b \\ \delta\phi_i &= -i(T^a)_{ij}\phi_j\alpha^a \ , \end{aligned}$$

BRS transformation · · ·

- $F_a[A, \phi]$ são as condições de gauge e o operador $\mathcal{M}_{ab}$ é tal que

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b = \frac{\delta F_a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb}\omega^b + \frac{\delta F_a}{\delta \phi_i} ig(T^b)_{ij}\phi_j\omega^b \ .$$

- S_{eff} não é invariante para as transformações de gauge devido à não invariância do termo que fixa a gauge e do Lagrangeano dos fantasmas. Esta não invariância pode desaparecer se escolhermos transformações apropriadas para os fantasmas para compensar a não invariância do termo $\int d^4x F_a^2$.

- Estas transformações são

$$\begin{cases} \delta_{\rm BRS} A_\mu^a &=& D_\mu^{ab}\omega^b\theta \\ \delta_{\rm BRS}\phi_i &=& ig(T^b)_{ij}\phi_j\omega^b\theta \\ \delta_{\rm BRS}\overline{\omega}^a &=& \frac{1}{\xi}F_a[A,\phi]\theta \\ \delta_{\rm BRS}\omega^a &=& \frac{1}{2}gf^{abc}\omega^b\omega^c\theta \end{cases}$$

onde θ é um parâmetro anticomutativo independente do ponto do espaço-tempo *(variável de Grassman)*.

BRS transformation · · ·

- Vemos que as transformações BRS para os campos A_μ^a e ϕ_i são transformações de gauge com parâmetro $\alpha^a(x) = -g\omega^a(x)\theta$. Notar que o carácter anticomutativo de θ é necessário para que o produto $\omega^a\theta$ tenha um carácter bosónico (comutativo).

- Para demonstrar a invariância de $S_{eff}[A,\phi]$ vamos demonstrar uma série de teoremas que são necessários para a prova geral. Antes é no entanto conveniente introduzir o operador de Slavnov s, definido pelas relações seguintes,

$$\begin{array}{rclcrcl} \delta_{\rm BRS} A_\mu^a &=& s A_\mu^a \theta & \qquad & \delta_{\rm BRS}\omega^a &=& s\omega^a\theta \\ \delta_{\rm BRS}\phi_i &=& s\phi_i\theta & & \delta_{\rm BRS}\overline{\omega}^a &=& s\overline{\omega}^a\theta \end{array}$$

- Este operador é distributivo em relação à multiplicação verificando-se as relações seguintes

$$\begin{aligned} s(B_1B_2) &= sB_1B_2 + B_1sB_2 \\ s(F_1B_2) &= sF_1B_2 + F_1sB_2 \\ s(B_1F_2) &= -sB_1F_2 + B_1sF_2 \\ s(F_1F_2) &= -sF_1F_2 + F_1sF_2 \end{aligned}$$

BRS transformation ···

- **Teorema**

  O operador s é nilpotente nos campos A^a_μ, ϕ_i e ω^a, isto é $s^2 A^a_\mu = s^2\phi_i = s^2\omega^a = 0$.

- **Dem.** Demonstremos para cada um dos casos. Obtemos

a) $s^2 A^a_\mu = 0$

$$
\begin{aligned}
s^2 A^a_\mu &= s(D^{ab}_\mu \omega^b) = -\frac{\delta D^{ab}_\mu}{\delta A^c_\nu} s A^c_\nu \omega^b + D^{ab}_\mu s\omega^b \\
&= -\delta^\nu_\mu(-g f^{abc}) D^{cd}_\nu \omega^d \omega^b + \frac{1}{2} g f^{bcd} D^{ab}_\mu (\omega^c \omega^d) \\
&= \left[g f^{abc} \partial_\mu \omega^c \omega^b + \frac{1}{2} g f^{acd} \partial_\mu \omega^c \omega^d + \frac{1}{2} g f^{acd} \omega^c \partial_\mu \omega^d \right] \\
&\quad + \left[g f^{abc}(-g) f^{cde} A^e_\mu \omega^d \omega^b + \frac{1}{2} g(-g) f^{bcd} f^{abe} A^e_\mu \omega^c \omega^d \right] \\
&= (g f^{abc} \partial_\mu \omega^c \omega^b - g f^{abc} \partial_\mu \omega^c \omega^b) \\
&\quad -\frac{1}{2} g^2 (f^{abc} f^{cde} - f^{adc} f^{cbe} + f^{cdb} f^{ace}) A^e_\mu \omega^d \omega^b = 0
\end{aligned}
$$

BRS transformation ···

b) $s^2\phi_i = 0$

$$
\begin{aligned}
s^2\phi_i &= s\left[ig(T^a)_{ij}\phi_j\omega^a\right] \\
&= -ig(T^a)_{ij}s\phi_j\omega^a + ig(T^a)_{ij}\phi_j s\omega^a \\
&= g^2(T^a)_{ij}(T^b)_{jk}\phi_k\omega^b\omega^a + ig(T^a)_{ij}\phi_j\frac{1}{2}gf^{abc}\omega^b\omega^c \\
&= \frac{1}{2}g^2[T^c,T^b]_{ik}\omega^b\omega^c\phi_k + \frac{i}{2}g^2(T^a)_{ij}\phi_j f^{abc}\omega^b\omega^c \\
&= \frac{i}{2}g^2(T^a)_{ij}\phi_j(f^{acb}+f^{abc})\omega^b\omega^c \\
&= 0
\end{aligned}
$$

BRS transformation ···

c) $s^2\omega^a = 0$

$$
\begin{aligned}
s^2\omega^a &= s\left(\frac{1}{2} g f^{abc}\omega^b\omega^c\right)\\
&= -\frac{1}{2} g f^{abc} s\omega^b\omega^c + \frac{1}{2} g f^{abc}\omega^b s\omega^c\\
&= -g f^{abc} s\omega^b\omega^c\\
&= -\frac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{bef}\omega^e\omega^t\omega^c\\
&= -\frac{1}{6} g^2 (f^{abc} f^{bef} + f^{abe} f^{bfc} + f^{abf} f^{bce})\omega^e\omega^t\omega^c\\
&= 0
\end{aligned}
$$

onde se usou a anticomutatividade dos fantasmas e novamente a identidade de Jacobi. Fica assim demonstrado o teorema.

BRS transformation ...

- Para gauges lineares pode-se demonstrar um resultado importante a que daremos a forma de teorema.

- **Teorema**

  Para gauges lineares o operador de Slavnov verifica a relação

$$s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b) = 0$$

- **Dem:**

  Vimos anteriormente que

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cb}_\mu \omega^b(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} ig(T^b)_{ij}\phi_j\omega^b(y) \right]$$

  Se usarmos as definições de δ_{BRS} e do operador de Slavnov podemos escrever

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^c_\mu(y)} sA^c_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} s\phi_i(y) \right]$$

BRS transformation $\cdots$

Se a gauge for linear $\frac{\delta F_a}{\delta A^c_\mu}$ e $\frac{\delta F_a}{\delta \phi_i}$ não dependem dos campos e portanto

$$s\left[\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x)\right] = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A_\mu(y)} s^2 A^c_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} s^2 \phi_i(y)\right] = 0$$

onde se usaram os resultados anteriores.

Usando os teoremas anteriores podemos agora mostrar que a acção efectiva é invariante para transformações de BRS. Vamos apresentar este resultado também sobre a forma de teorema.

- **Teorema**

  A acção S_{eff} é invariante para as transformações de BRS.

- **Dem.** A acção efectiva é

$$S_{eff}[A,\phi] = S[A,\phi] + \int d^4x \left[-\frac{1}{2\xi} F^2_a[A,\phi] - \overline{\omega}^a \mathcal{M}_{ab}\omega^b\right]$$

BRS transformation · · ·

Como a acção clássica é invariante para transformações de gauge devemos ter

$$s\left(S[A,\phi]\right)=0\ .$$

Para os outros termos obtemos

$$s\left(-\frac{1}{2\xi}F_a^2-\overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b\right)=-\frac{1}{\xi}F_a sF_a+s\overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b-\overline{\omega}^a s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b)$$

Mas

$$sF_a(x)=\int d^4y\left[\frac{\delta F_a}{\delta A_\mu^b(y)}sA_\mu^b(y)+\frac{\delta F_a}{\delta\phi_i(y)}s\phi_i(y)\right]=\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x)$$

e por um dos teoremas anteriores

$$s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b)=0$$

BRS transformation · · ·

Portanto

$$s\left(-\frac{1}{2\xi}F_a^2-\overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b\right)=\left(-\frac{1}{\xi}F_a+s\overline{\omega}^a\right)\mathcal{M}_{ab}\omega^b=0$$

onde se usou $s\overline{\omega}^a=\frac{1}{\xi}F_a$. Pondo tudo junto obtemos portanto

$$sS_{eff}[A,\phi]=0\ .$$

BRS transformation ···

Para o seguimento é ainda importante um outro teorema,

- **Teorema**

  A medida $\mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^b)$ é invariante para transformações BRS.

- **Dem:** Cálculos simples conduzem às seguintes relações:

$$\frac{\delta(sA^a_\mu)}{\delta A^a_\mu} = -g f^{aba} \delta^\mu_\mu \omega^b = 0$$

$$\frac{\delta(s\phi_i)}{\delta\phi_i} = ig(T^a)_{ii}\omega^a = 0 \qquad ; \qquad (Tr(T^a) = 0)$$

$$\frac{\delta(s\omega^a)}{\delta\omega^a} = g f^{aac} \omega^c = 0$$

$$\frac{\delta(s\overline{\omega}^a)}{\delta\overline{\omega}^a} = 0$$

Como vimos no capítulo anterior estas relações implicam que a medida é invariante, o que demonstra o teorema.

Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor identities

- Vamos aqui deduzir a generalização das identidades de Ward-Takahashi para as teorias de gauge não abelianas. Esse trabalho foi feito, entre outros, por Slavnov e Taylor mas usaremos com frequência o nome de identidades de Ward mesmo para as teorias não abelianas. Duma forma genérica, as identidades de Ward são relações entre as funções de Green que resultam da simetria de gauge da teoria. Como vimos a maneira mais conveniente das expressar é usar os funcionais geradores das funções de Green.

- Consideremos então uma teoria de gauge não abeliana. Por simplicidade consideramos que a matéria é constituída por campos escalares ϕ_i. A introdução de fermiões é imediata. O funcional gerador das funções de Green é então

$$Z[J^a_\mu, J_i, \eta^a, \overline{\eta}^a] = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}, \omega) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{eff} + J^a_\mu A^{\mu a} + J_i \phi_i + \overline{\eta}^a \omega^a + \overline{\omega}^a \eta^a]}$$

onde introduzimos também fontes para os fantasmas. Uma transformação de BRS é uma mudança de variável no integral. O valor do integral não deve ser alterado por essa mudança de variáveis. Como S_{eff} e a medida são invariantes devemos ter o seguinte teorema:

❒ **Teorema [7**

Dada uma função de Green qualquer

$$G(x_1, ..., y_1, ..., z_1, ..., w_1, ...)$$

$$= \langle 0 | \, T A^a_{\mu_1}(x_1) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^b(w_1) \cdots |0\rangle$$

temos as relações

i) $$s \, \langle 0 | \, T A^a_{\mu}(x_1) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^{b1}(w_1) \, |0\rangle = 0$$

ii) $$0 = \langle 0 | \, T s A^a_{\mu}(x_1) \cdots |0\rangle + \cdots + \langle 0 | \, T \cdots s\phi_i \cdots |0\rangle + \cdots$$

$$+ \langle 0 | \, T \cdots s\overline{\omega}^a \cdots |0\rangle \cdots + \langle 0 | \, T \cdots s\omega^a \cdots |0\rangle$$

Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor identities · · ·

- **Dem:** A demonstração é imediata se escrevermos

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\, T A^a_\mu(x_1)\cdots\phi_{i_1}(y_1)\cdots\overline{\omega}^a(z_1)\cdots\omega^b(w_1)\,|0\rangle = \\
&= \int \mathcal{D}(A_\mu,\phi_i,\omega,\overline{\omega})A^a_\mu(x_1)\cdots\phi_{i1}(y_1)\cdots\overline{\omega}^a(z_1)\cdots\omega^b(w_1)e^{iS_{eff}}
\end{aligned}
$$

  Então a transformação de BRS deve deixar o valor do integral invariante pelo que a primeira relação é imediata. A segunda relação resulta da primeira e da invariância de medida e da acção efectiva.

- Este teorema constitui uma forma expedita de estabelecer relações entre as funções de Green para casos particulares e é muito útil em cálculos práticos, como veremos no seguimento. Contudo para estabelecer resultados gerais sobre a renormalização e invariância de gauge da matriz S interessa-nos as identidades de Ward expressas em termos dos funcionais geradores.

Usando a invariância dum integral numa mudança de variáveis, a invariância da medida $\mathcal{D}$ e de S_{eff} obtemos a identidade de Ward para o funcional gerador Z

$$0 = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \omega, \overline{\omega}) \int d^4x (J^{\mu a} s A^a_\mu + J_i s\phi_i + \overline{\eta}^a s\omega^a - s\overline{\omega}^a \eta^a) e^{i(S_{eff} + \text{fontes})}$$

As identidades de Ward mais úteis são para o funcional Γ. A expressão anterior não permite passar para o funcional Γ porque sA^a_μ, $s\phi_i$ e $s\omega^a$ são não lineares nos campos. Para resolver este problema introduzimos fontes para estes operadores não lineares. Generalizamos assim a acção efectiva definindo uma nova quantidade Σ tal que

$$\begin{aligned}\Sigma[A^a_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^a, K^a_\mu, K_i, L^a] \\ \equiv S_{eff}[A^a_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^a] + \int d^4x (K^{a\mu} s A^a_\mu + K^i s\phi_i + L^a s\omega^a) \end{aligned} \tag{3}$$

onde $K^{a\mu}, K_i$ e L^a são fontes para os operadores compostos $sA^a_\mu, s\phi_i$ e $s\omega^a$ respectivamente.

Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor identities $\cdots$

Usando os teoremas anteriores é imediato mostrar que Σ é invariante para transformações BRS, isto é,

$$s\Sigma = 0 \ .$$

Consideremos agora que o funcional gerador das funções de Green na presença das fontes $J^a_\mu, J_i, \eta^a, \overline{\eta}^a, K^{\mu a}, K^i$ e L^a, isto é

$$Z[J^a_\mu, J_i, \eta, \overline{\eta}, K_\mu, K_i, L] = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}, \omega) e^{i\left[\Sigma + \int d^4x (J^a_\mu A^{\mu a} + J_i\phi_i + \overline{\eta}\omega + \overline{\omega}\eta)\right]}$$

Podemos agora repetir o raciocínio da invariância para as transformações de BRS. Como anteriormente obtemos (recordar que $s\Sigma = 0$)

$$0 = \int \mathcal{D}(\cdots) \int d^4x [J^\mu_a s A^a_\mu + J^i s\phi_i + \overline{\eta}^a s\omega^a - s\overline{\omega}^a \eta^a] e^{i(\Sigma + \text{fontes})} \ ,$$

mas agora temos operadores compostos sA, $s\phi$ e $s\omega$, isto é

$$sA^a_\mu = \frac{\delta\Sigma}{\delta K^{\mu a}}, \qquad s\phi_i = \frac{\delta\Sigma}{\delta K_i}, \qquad s\omega^a = \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}, \qquad s\overline{\omega}^a = \frac{1}{\xi} F^a$$

TÉCNICO LISBOA

Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor identities · · ·

Obtemos então

$$\int \mathcal{D}(\cdots) \int d^4x \left[J_a^\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta\Sigma}{\delta K^i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F^a \eta^a \right] e^{i(\Sigma+\text{fontes})} = 0$$

ou ainda

$$\int d^4x \left[J_a^\mu \frac{\delta}{i\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta}{i\delta K^i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta}{i\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J_\mu}, \frac{\delta}{i\delta J_i} \right] \eta^a \right] e^{iW[J_\mu^a, J_i, \eta, \overline{\eta}, K_\mu, K_i,}$$

Para uma condição de gauge linear todos os operadores diferenciais dentro do parêntesis recto são de 1^a ordem e portanto podemos escrever

$$\int d^4x \left[J_a^\mu \frac{\delta}{\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta}{\delta K_i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta}{\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F_a \eta^a \right] W = 0 \ .$$

Esta é a expressão da identidade de Ward para o funcional gerador das funções de Green conexas.

Normalmente as identidades de Ward são mais úteis para o funcional gerador das funções de Green irredutíveis que é definido por

$$\Gamma[A_\mu,\phi_i,\overline{\omega},\omega,K_\mu,K_i,L] \equiv W[J_\mu,J_i,\eta,\overline{\eta},K_\mu,K_i,L] - \int d^4x [J^a_\mu A^{a\mu} + J_i\phi_i + \overline{\eta}\omega + \overline{\omega}\eta]$$

com as relações habituais

$$\phi_i = \frac{\delta W}{\delta J_i} \qquad \omega^a = \frac{\delta W}{\delta \overline{\eta}^a}$$

$$A^a_\mu = \frac{\delta W}{\delta J^{\mu a}} \qquad \overline{\omega}^a = -\frac{\delta W}{\delta \eta^a}$$

e as relações inversas

$$J_i = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i} \qquad \overline{\eta}^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega^a}$$

$$J^a_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^{\mu a}} \qquad \eta^a = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}^a}$$

Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor identities $\cdots$

Como a transformada de Legendre deixa inertes as fontes K^a_μ, K_i e L^a devemos ter

$$\frac{\delta W}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta \Gamma}{\delta K^a_\mu} \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta K_i} = \frac{\delta \Gamma}{\delta K_i} \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta L^a} = \frac{\delta \Gamma}{\delta L^a}$$

Obtemos então facilmente

$$\int d^4x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^{\mu a}(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta K_i(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i(x)} - \frac{\delta \Gamma}{\delta L^a(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega^a(x)} - \frac{1}{\xi} F^a \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}^a(x)} \right] = 0$$

Esta equação é o funcional gerador das identidades de Ward para uma teoria de gauge não abeliana numa gauge linear. As identidades de Ward para funções de Green específicas obtém-se por derivação funcional em ordem aos campos apropriados.

Na prática a equação anterior usa-se em ligação com outra identidade funcional, a equação de movimento (ou de Dyson- Schwinger) para os fantasmas. Esta pode ser obtida fazendo a seguinte mudança de variáveis no integral funcional

$$\begin{cases} \delta A^a_\mu & = \quad \delta\phi_i = \delta\omega^a = 0 \\ \\ \delta\overline{\omega}^a & = \quad f^a = \text{constante infinitesimal} \end{cases}$$

Então

$$\delta Z = 0 = \int \mathcal{D}(\cdots)\left(i\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\omega}^a} + i\eta^a\right) f^a e^{i(\Sigma+\text{fontes})}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\omega}^a(x)} &= -\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = -sF_a(x) \\ &= -\int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} sA^b_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)} s\phi_i(y)\right] \\ &= -\int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}\frac{\delta\Sigma}{\delta K^{b\mu}(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)}\frac{\delta\Sigma}{\delta K_i(y)}\right] \end{aligned}$$

Obtemos portanto

$$0 = \int \mathcal{D}(\cdots) \left\{ -i \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} \frac{\delta \Sigma}{\delta K^{b\mu}(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} \frac{\delta \Sigma}{\delta K_i(y)} \right] + i\eta^a(x) \right\} e^{i(\Sigma + \text{fontes})}$$

$$= \left\{ - \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} \frac{\delta}{\delta K^{b\mu}(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} \frac{\delta}{\delta K_i(y)} \right] + i\eta^a(x) \right\} e^{iW}$$

Usando agora

$$\eta^a = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}^a}$$

obtemos finalmente (para gauges lineares)

$$\int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta K^{\mu b}(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta K_i(y)} \right] = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}^a(x)}$$

que é o funcional gerador das equações de Dyson-Schwinger para os fantasmas.

Lecture 11

Example: Transversality of vacuum polarization

- Vamos aqui dar um exemplo de aplicação das identidades de Ward mostrando que a polarização do vácuo é transversal. Como a teoria de gauge pura já é não trivial vamos somente considerar este caso, as generalizações são imediatas.

- Para mostrar os detalhes dos cálculos vamos fazer este exemplo usando dois métodos. O primeiro, que chamaremos *método formal*, consiste na aplicação das identidades de Ward para o funcional Γ que acabámos de mostrar, o segundo é o *método prático* que resulta da aplicação dos resultados dum teorema que emonstrámos anteriormente.

- A comparação dos dois métodos será importante para a compreensão das expressões.

Transversality of vacuum polarization: formal method

Como estamos a considerar uma teoria de gauge pura a expressão para o funcional gerador das identidades de Ward para o funcional Γ é

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu a}(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a(x)} - \frac{1}{\xi} F^a(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)} \right] = 0$$

onde vamos escolher a gauge covariante

$$F^a(x) = \partial_\mu A^{a\mu}(x)$$

Para prosseguir é necessário saber o que representam $\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu}$ e $\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a}$. Da forma como foram introduzidos temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} &= \frac{\delta W}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta}{i\delta K^a_\mu} \ln Z = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta K^a_\mu(x)} \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}(\cdots) s A^a_\mu(x) e^{i(\Sigma + \text{fontes})}
\end{aligned}$$

Transversality of vacuum polarization: formal method

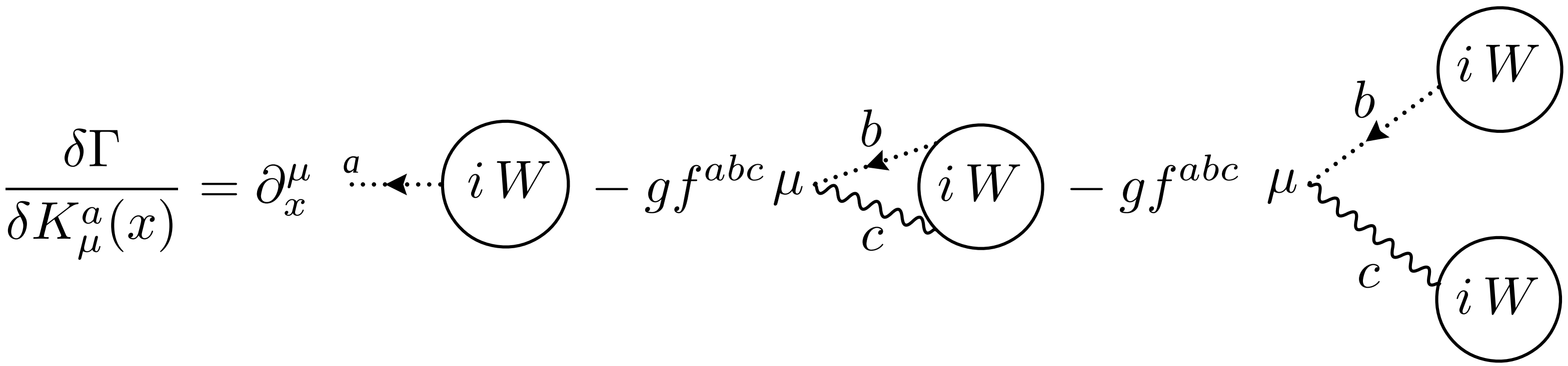
Como $sA^a_\mu(x) = D^{ab}_\mu \omega^b = \partial_\mu \omega^a(x) - g f^{abc} \omega^b(x) A^c_\mu(x)$, obtemos então

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} = \partial^x_\mu \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta \overline{\eta}^a(x)} - g f^{abc} \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{i\delta J^c_\mu(x) i\delta \overline{\eta}^b(x)}$$

Introduzindo $Z \equiv \exp(iW)$, a equação anterior escreve-se

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} = \partial^\mu_x \frac{\delta(iW)}{i\delta \overline{\eta}^a(x)} - g f^{abc} \left[\frac{\delta^2 iW}{i\delta J^c_\mu(x) i\delta \overline{\eta}^b(x)} + \frac{\delta iW}{i\delta J^c_\mu(x)} \frac{\delta iW}{i\delta \overline{\eta}^b(x)} \right]$$

que tem a seguinte representação diagramática:



onde W é o funcional gerador das funções de Green conexas.

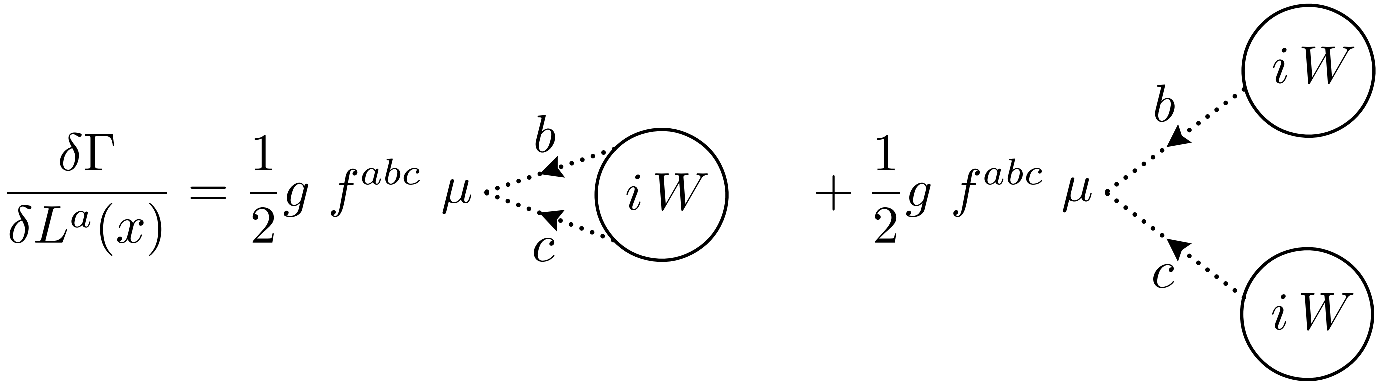
Transversality of vacuum polarization: formal method $\cdots$

De igual modo se pode mostrar

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)} = \frac{1}{2} g\ f^{abc}\ \frac{1}{Z}\ \frac{\delta^2 Z}{i\delta\overline{\eta}^c(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)}$$

$$= \frac{1}{2} g\ f^{abc} \left[\frac{\delta^2(iW)}{i\delta\overline{\eta}^c(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)} + \frac{\delta(iW)}{i\delta\overline{\eta}^c(x)}\ \frac{\delta(iW)}{i\delta\overline{\eta}^b(x)} \right]$$

ou diagramaticamente



Transversality of vacuum polarization: formal method ···

Temos que aplicar $\dfrac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}$ à equação de partida. Obtemos

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu a}(x)}\right)\Bigg|_{=0}=\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta K^a_\mu(x)}\Bigg|_{=0}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^c_\nu(z)\delta A^{\mu a}(x)}\Bigg|_{=0}$$

mas

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta K^a_\mu(x)}\Bigg|_{=0}&=\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^2\Gamma}{i\delta\eta^f(w)\delta K^a_\mu(x)}\right)\Bigg|_{=0}\\
&=\partial^\mu_x\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^2(iW)}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^a(x)}\right)\Bigg|_{=0}\\
&\quad-g\,f^{ab'c}\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^{b'}(x)i\delta J^c_\mu(x)}\right)\Bigg|_{=0}\\
&=\partial^\mu_x\delta^4(x-y)\delta^{ab}-gf^{ab'c}\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\\
&\qquad\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^{b'}(x)i\delta J^c_\mu(x)}\right)\Bigg|_{=0}\end{aligned}$$

Transversality of vacuum polarization: formal method ···

De modo semelhante

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a}\right)\bigg|_{=0}=0$$

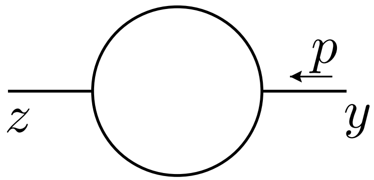
e

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{1}{\xi}\partial_\rho A^{\rho a}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)}\right)\bigg|_{=0}=\frac{1}{\xi}\partial^\nu_x\delta^4(x-z)\ \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^a(x)}\bigg|_{=0}$$

Usando estes resultados obtemos

$$-\partial^y_\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\mu(y)\delta A^c_\nu(z)}-gf^{ade}\int d^4x d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)$$
$$\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^d(x)i\delta J^e_\mu(x)}\right)\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^c_\nu(z)}\right)+\frac{1}{\xi}\partial^\nu_z\ \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^c(z)}=0$$

Aplicando transformadas de Fourier, com a convenção da Figura



obtemos

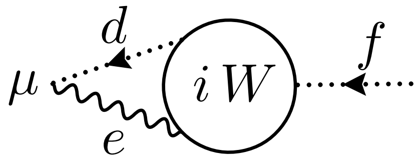
$$-ip^\mu(i)G^{-1}{}^{cb}_{\nu\mu}(p) - gf^{ade}iG^{-1}{}^{ca}_{\nu\mu}(p)\Delta^{-1fb}X^{\mu def} + (-ip^\nu)\frac{i}{\xi}\Delta^{-1cb}(p) = 0$$

ou ainda

$$p^\mu G^{-1}{}^{cb}_{\nu\mu} = -\frac{1}{\xi}\Delta^{-1cb}p_\nu + ig\ f^{ade}G^{-1}{}^{ca}_{\nu\mu}(p)\ \Delta^{-1fb}X^{\mu def} \qquad [1]\rightarrow$$

onde

$$X^{\mu def} = \text{FT}\left[<0|T\omega^d(x)\overline{\omega}^f(w)A^{\mu e}(x)|0>_c \right] \equiv$$



Transversality of vacuum polarization: formal method $\cdots$

Para demonstrar a transversabilidade precisamos ainda da equação de movimento para os fantasmas que é, para o nosso caso,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}^a(z)} = -\partial_z^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta K^{\mu a}(z)}$$

Aplicando o operador $\dfrac{\delta}{\delta \omega^b(y)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \omega^b(y) \delta \overline{\omega}^a(z)} &= -\Box\, \delta^{ab} \delta^4(y-z) \\ &\quad + g f^{adc} \int d^4 w \left(-i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \omega^b(y) \delta \overline{\omega}^f(w)} \right) \partial_z^\mu \left(\frac{\delta^3 i W}{i\delta J_\mu^c(z) i\delta \eta^f(w) i\delta \overline{\eta}^d(z)} \right)\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$i\Delta^{-1ab} = p^2 \delta^{ab} + g f^{adc}(-ip^\mu) X_\mu^{dcf} \Delta^{-1fb} \quad [2] \rightarrow \rightarrow$$

Transversality of vacuum polarization: formal method · · ·

As equações anteriores permitem mostrar a transversabilidade do vácuo. Para isso escrevamos

$$G^{-1\,ab}_{\ \ \mu\nu} = G^{-1\,ab}_{T\ \mu\nu} + i\frac{a}{\xi}\delta^{ab}p_\mu p_\nu$$

onde $p^\mu G^{-1\,ab}_{T\ \mu\nu} = 0$. Para o propagador livre $a = 1$. Para mostrar que a polarização do vácuo é transversal basta mostrar que a parte longitudinal não é renormalizada e portanto que o valor de a continuar a ser $a = 1$. Usando

$$p^\mu G^{-1\,ab}_{\ \ \mu\nu} = i\frac{a}{\xi}\delta^{ab}p^2 p_\nu$$

e multiplicando a equação [1] por p^ν obtemos

$$i\frac{a}{\xi}p^4\delta^{cb} = -\frac{1}{\xi}p^2\Delta^{-1cb} - \frac{a}{\xi}p^2 g\ f^{cde}p_\mu X^{\mu def}\Delta^{-1fb}$$

Transversality of vacuum polarization: formal method · · ·

Usando agora a equação [2] obtemos depois de alguma álgebra trivial

$$0 = -\frac{1}{\xi} p^2 \Delta^{-1cb} + \frac{a}{\xi} p^2 \Delta^{-1cb}$$

o que implica

$$a = 1$$

como queríamos mostrar.

Transversality of vacuum polarization: practical method

Vamos agora mostrar a transversabilidade da polarização do vácuo usando o método prático baseado nos resultados do Teorema [7] Como

$$s\overline{\omega}^b(x) = \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^{\mu b}(x)$$

e

$$sA^a_\nu = \partial_\nu \omega^a - g f^{adc}\omega^d A^c_\nu$$

é fácil de ver que a função de Green de partida deverá ser $< 0|TA^a_\nu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 >$. Então o teorema diz-nos que

$$s < 0|TA^a_\mu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 >= 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi} < 0|TA^a_\nu(x)\partial_\mu A^{\mu b}(y)|0 > \quad &= \quad < 0|T\partial_\nu\omega^a(x)\overline{\omega}^b(y)|0 > \\ &\quad -g f^{adc} < 0|T\omega^d(x)A^c_\nu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 >\end{aligned}$$

Transversality of vacuum polarization: practical method · · ·

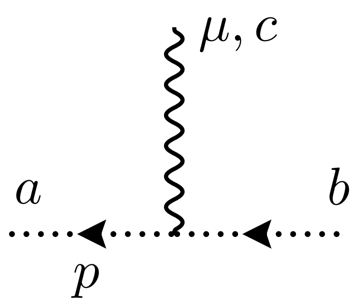
Aplicando a transformação de Fourier obtemos

$$\frac{i}{\xi} p^\rho G^{ab}_{\nu\rho}(p) = -i p_\nu \Delta^{ab}(p) - g f^{adc} X^{dcb}_\nu$$

onde X^{dcb}_ν foi definido anteriormente. Multiplicando por $G^{-1\nu\mu}\Delta^{-1}$ obtemos

$$p^\mu G^{-1ac}_{\nu\mu} = -\frac{1}{\xi} p_\nu \Delta^{-1ac} + i g f^{fde} \chi^{deb}_\nu \Delta^{-1bc} G^{-i\nu\mu af}$$

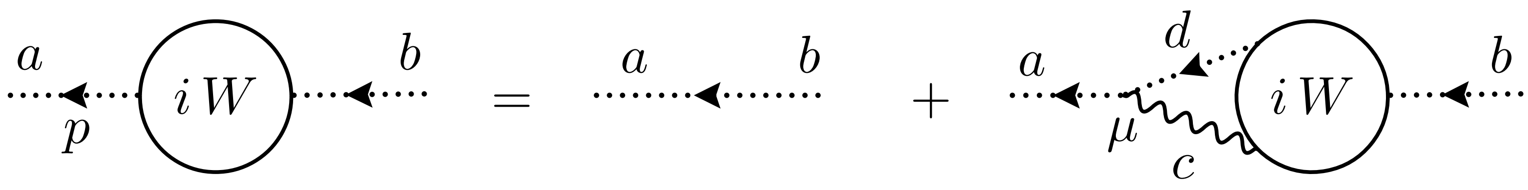
que é precisamente a equação [1]. A equação [2] pode ser obtida facilmente sabendo que o único vértice dos fantasmas é



$$g f^{abc} p^\mu$$

Transversality of vacuum polarization: practical method · · ·

Então



ou seja

$$\Delta^{ab}(p) = \frac{i}{p^2}\delta^{ab} + \frac{i}{p^2} g f^{adc} p^\mu X_\mu^{dcb}$$

ou ainda

$$i\Delta^{-1ab} = p^2\delta^{ab} - ig f^{adc} p^\mu X_\mu^{dcb'} \Delta^{-1b'b}$$

que é precisamente a equação [2] A demonstração da transversabilidade é agora igual ao caso formal.

Gauge invariance of the S matrix

- Mostrámos anteriormente a invariância da gauge da matriz S, usando o teorema da equivalência e o facto que os funcionais geradores correspondentes a condições de gauge diferentes diferiam somente no termo das fontes. A demonstração que fizemos usava as propriedades específicas de gauge de Coulomb e podia levantar alguma dúvida quanto à sua validade geral.

- Vamos aqui mostrar, usando as identidades de Ward, que os funcionais Z_F e $Z_{F+\Delta F}$ correspondentes às condições de gauge F e $F+\Delta F$, respectivamente, diferem somente no termo das fontes. Como F e ΔF são arbitrários, e demonstração é geral. Temos

$$Z_F[J^a_\mu] = \int D(\cdots) e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^a_\mu A^{\mu a} + J_i \phi_i)]}$$

Então

$$\begin{aligned} Z_{F+\Delta F} - Z_F \quad = \quad & \int D(\cdots) \int d^4x \; i \left[-\frac{1}{\xi} F^a \Delta F^a - \overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta \Delta F^a_{(x)}}{\delta A^b_\mu(y)} sA^{b\mu}(\right. \\ & \left. -\overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta \Delta F^a(x)}{\delta \phi_i(y)} s\phi_i(y) \right] e^{i(S_{eff} + \text{fontes})} \end{aligned}$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

Usamos agora as identidades de Ward na forma correspondente ao funcional Z, isto é

$$0 = \int D(\cdots) \int d^4x [J^{\mu a} s A^a_\mu + J^i s\phi_i + \overline{\eta} s\omega - s\overline{\omega}\eta]\; e^{\{i(S_{eff} + J^a_\mu A^{\mu a} + J_i\phi_i + \overline{\omega}\eta + \overline{\eta}\omega)\}}$$

Derivando em ordem a $\eta^a(x)$ e pondo as fontes dos fantasmas nulas obtemos

$$0 = \int D(\cdots) \left[\frac{1}{\xi} F^a(x) + i\overline{\omega}^a(x) \int d^4y [J^{\mu b} s A^b_\mu + J^i s\phi_i]\right] e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^a_\mu A^{\mu i} + J_i\phi_i)]}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi} F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] \quad & \int D(\cdots) e^{i(S_{eff} + \text{fontes})} = \\ & = \int D(\cdots) i\overline{\omega}^a(x) \int d^4y [J^{\mu b} s A^b_\mu + J_i s\phi_i] e^{i(S_{eff} + \text{fontes})} \end{aligned}$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

Então

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}(\cdots)\left(-\frac{1}{\xi} F^a \Delta F^a\right) e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} = \\
&= \Delta F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\left(-\frac{1}{\xi} F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\right) \int D(\cdots) e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\
&= \Delta F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] \int D(\cdots) i\overline{\omega}^a(x) \int d^4y [J^{\mu b} s A^b_\mu + J^i s\phi_i] e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\
&= \int \mathcal{D}(\cdots)\left\{\overline{\omega}^a(x) \int d^4y \left[\frac{\delta \Delta F^a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} s A^b_\mu(y) + \frac{\delta \Delta F^a(x)}{\delta \phi_i(y)} s\phi_i(y)\right]\right. \\
&\qquad \left. + i\overline{\omega}^a(x) \Delta F^a(x) \int d^4y [J^{\mu b} s A^b_\mu + J^i s\phi_i]\right\} e^{i(S_{eff}+\text{fontes})}
\end{aligned}
$$

Gauge invariance of the S matrix $\cdots$

Portanto

$$\int \mathcal{D}(\cdots)\left(-\frac{1}{\xi}F^a\Delta F^a - \overline{\omega}^a(x)\int d^4y\left[\frac{\delta\Delta F^a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}sA^b_\mu(\eta) + \frac{\delta\Delta F^a}{\delta\phi_i(y)}s\phi_i(y)\right]\right) e^{i(S_{eff}+\text{f}}$$

$$= \int \mathcal{D}(\cdots)i\overline{\omega}^a(x)\Delta F^a(x)\int d^4y\left[J^{\mu b}sA^b_\mu + J^i s\phi_i\right] e^{i(S_{eff}+\text{fontes})}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} Z_{F+\Delta F} & -Z_F \\ & = \int \mathcal{D}(\cdots)i\int d^4x\left[i\overline{\omega}^a(x)\Delta F^a(x)\int d^4y(J^{\mu b}sA^b_\mu + J_i s\phi_i)\right]e^{i(S_{eff}+\text{font}} \\ & = \int \mathcal{D}(\cdots)e^{i\left\{S_{eff}+\int d^4y[J^a_\mu(y)\mathcal{A}^{\mu a}(y) + J_i\Phi_i(y)]\right\}} \end{aligned}$$

onde

$$\Phi_i(y) \equiv \phi_i(y) + i \int d^4x [\overline{\omega}^a(x) \Delta F^a(x) s\phi_i(y)]$$

e

$$\mathcal{A}^a_\mu(y) \equiv A^a_\mu(y) + i \int d^4x [\overline{\omega}^b(x) \Delta F^b(x) s A^a_\mu(y)]$$

A diferença entre os funcionais geradores $Z_{F+\Delta F}$ e Z_F é apenas na forma funcional dos termos das fontes. Podemos portanto usar o teorema da equivalência para mostrar que as matrizes S renormalizadas são iguais nos dois casos

$$S^R_{F+\Delta F} = S^R_F \ .$$

Ward-Takahashi identities for the funcional $Z[J]$

Vamos aqui tornar a derivar as identidades de Ward para QED já encontradas no estudo da renormalização, mas utilizando agora os métodos funcionais.
Pode-se mostrar que para o funcional gerador das funções de Green completas se pode escrever, numa gauge linear,

$$Z(J_\mu, \overline{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}) e^{i(S_{eff} + \int d^4x (J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)}$$

onde J_μ, $\overline{\eta}$ e η são as fontes associadas a A_μ, ψ e $\overline{\psi}$ respectivamente. A acção efectiva é dada por

$$S_{eff} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{QED} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \right] = S_{QED} + S_{GF}$$

onde

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \ .$$

S_{QED} é invariante para as transformações de gauge do grupo $U(1)$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \\ \delta\psi = -ie\Lambda\psi \\ \delta\overline{\psi} = ie\Lambda\overline{\psi} \end{array}\right.$$

enquanto que S_{eff} contém a parte de *gauge fixing* que não é invariante nestas transformações. Portanto as identidades de Ward tomam aqui a forma

$$\left(\frac{\delta S_{GF}}{\delta\phi_i}\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] + J_i\right) F_i\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] Z(J) = 0$$

o que se escreve no nosso caso, reintroduzido as integrações,,

$$0 = \int d^4x \left[\frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial_\nu\left(\frac{\delta}{i\delta J_\nu}\right)\partial_\mu\Lambda + J^\mu\partial_\mu\Lambda - ie\Lambda\overline{\eta}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} + ie\Lambda\eta\frac{\delta}{i\delta\eta}\right] Z(J^\mu, \overline{\eta}, \eta)$$

Ward-Takahashi identities for the funcional $Z[J]\cdots$

ou seja, integrando por partes,

$$\int d^4x\, \Lambda \left[-\frac{1}{\xi}\Box\partial_\nu \left(\frac{\delta}{i\delta J_\nu} \right) - \partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} + ie\eta\frac{\delta}{i\delta\eta} \right] Z(J^\mu, \overline{\eta}, \eta) = 0$$

Podemos ainda escrever

$$\left[\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu \left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + ie\overline{\eta}\left(\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} \right) - ie\eta\left(\frac{\delta}{i\delta\eta} \right) \right] Z(J, \overline{\eta}, \eta) = 0$$

Ward-Takahashi identities for the functionals W and Γ

- Do ponto de vista das aplicações é mais útil a identidade de Ward em termos do funcional gerador das funções de Green próprias. Este problema é mais simples do que o caso das Teorias de Gauge não abelianas que acabámos de ver pois a equação acima é linear nas derivadas funcionais em relação às diversas fontes (note-se que se se tivesse escolhido uma condição de gauge *não linear* isto já não seria verdade, mesmo em QED).

- Esta linearidade permite escrever imediatamente

$$\partial_\mu J^\mu + \left[\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu}\right) + ie\overline{\eta}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} - ie\eta\frac{\delta}{i\delta\eta}\right] W(J,\overline{\eta},\eta) = 0$$

onde W é o funcional gerador das funções de Green conexas

$$Z(J^\mu,\overline{\eta},\eta) \equiv e^{iW(J^\mu,\overline{\eta},\eta)}$$

- Como vimos, o funcional gerador das funções de Green próprias é

$$\Gamma(A_\mu,\psi,\overline{\psi}) = W(J_\mu,\overline{\eta},\eta) - \int d^4x[J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta]$$

Ward-Takahashi identities for the functionals W and Γ

- Com

$$A_\mu = \frac{\delta W}{i\delta J^\mu} \; ; \; \psi = \frac{\delta W}{i\delta \overline{\eta}} \; ; \; \overline{\psi} = -\frac{\delta W}{i\delta \eta}$$

e

$$J_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \; ; \; \eta = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} \; ; \; \overline{\eta} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}$$

onde, como habitualmente, as derivadas fermiónicas são derivadas esquerdas.

- Então podemos escrever

$$\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + ie\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}\psi + ie\overline{\psi}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} = 0$$

- Esta equação é o ponto de partida para gerar todas as identidades de Ward em QED. A sua aplicação é muito mais fácil do que a expressão equivalente usada no estudo da renormalização e que foi demonstrada utilizando o formalismo canónico. Os métodos funcionais tornam estas expressões particularmente simples.

Example: Ward identity for the QED vertex

- Para nos convencermos que a equação anterior conduz às identidades de Ward já nossas conhecidas, vamos obter a identidade de Ward para o vértice em QED.
- Apliquemos $\frac{\delta^2}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(z)}$. Obtemos então

$$\partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(z)\delta A^\mu(x)}$$

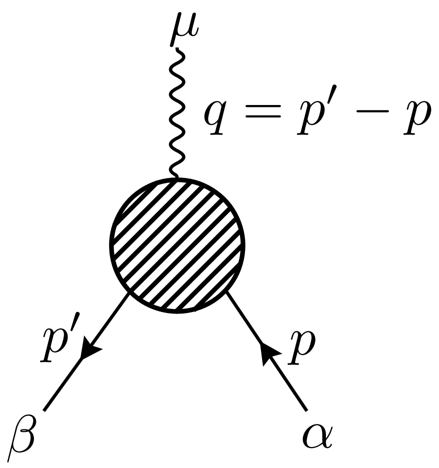
$$=ie\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(x)}\delta^4(z-x)-\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_\alpha(x)\delta\overline{\psi}_\beta(z)}\delta^4(y-x)\right]$$

ou seja

$$\partial_x^\mu\Gamma_{\mu\beta\alpha}(x,z,y)=ie\left[\Gamma_{\beta\alpha}(x,y)\delta^4(z-x)-\Gamma_{\beta\alpha}(z,x)\delta^4(y-x)\right]$$

Example: Ward identity for the QED vertex ···

Aplicando agora a transformada de Fourier a ambos os membros, com os momentos definidos de acordo com a Figura



obtemos, omitindo os índices spinoriais,

$$q^\mu \Gamma_\mu(p', p) = ie[S^{-1}(p) - S^{-1}(p')]$$

que é exactamente a identidade pretendida.

Ghosts in QED

Anteriormente dissemos que para QED o funcional gerador é dado por

$$Z(J_\mu,\overline{\eta},\eta) = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi}) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_{QED}+\mathcal{L}_{GF}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta]}$$

onde $\mathcal{L}_{QED}$ é o Lagrangeano usual de QED e o termo que fixa a gauge é dado por

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \ .$$

De facto isto não é estritamente verdade. Se usássemos a prescrição para teorias de gauge seria

$$\tilde{Z}(J_\mu,\eta,\overline{\eta},\zeta,\overline{\zeta}) = \int D(A_\mu,\psi,\overline{\psi},\omega,\overline{\omega}) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_{eff}+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+\overline{\omega}\zeta+\overline{\zeta}\omega]}$$

onde ω e $\overline{\omega}$ são campos escalares anticomutativos. Estas partículas fictícias são designadas, como vimos, por *fantasmas* de Fadeev-Popov. Embora não apareçam como estados finais em processos físicos, a introdução de fontes para elas é conveniente para discutir as identidades de Ward.

Ghosts in QED · · ·

No Lagrangeano anterior $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{G}}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{G}} = -\overline{\omega}\, \Box\, \omega$$

A razão pela qual em QED podemos trabalhar com o funcional gerador Z e não $\tilde{Z}$ tem a ver com o facto de os fantasmas em QED não terem acoplamentos com as partículas físicas e poderem ser omitidos completamente da teoria. Vamos introduzir agora as transformações de Becchi Rouet e Stora (BRS). O objectivo destas transformações é fazer com que $\mathcal{L}_{eff}$ seja invariante. É fácil de ver que para QED obtemos esse resultado com as transformações

$$\begin{cases} \delta\psi = -ie\omega\theta\psi \\ \delta\overline{\psi} = ie\overline{\psi}\omega\theta \\ \delta A_\mu = \partial_\mu\omega\theta \\ \delta\overline{\omega} = \frac{1}{\xi}(\partial\cdot A)\theta \\ \delta\omega = 0 \end{cases}$$

Ghosts in QED · · ·

- O parâmetro θ é anticomutativo (*variável de Grassman*). As transformações nos campos físicos são transformações de gauge de parâmetro $\Lambda = \omega\theta$ pelo que $\mathcal{L}_{QED}$ é invariante. As transformações em ω e $\overline{\omega}$ são tais que a variação de $\mathcal{L}_{GF}$ cancela a de $\mathcal{L}_G$.
- A invariância da medida de integração e de S_{eff} permite imediatamente escrever as identidades de Ward, para os funcionais geradores
- As transformações BRS permitem obter as identidades de Ward duma forma expedita sem ter que recorrer à derivação funcional de $\tilde{\Gamma}$. Este método baseia-se, como vimos, no facto de que o operador δ_{BRS} aplicado a qualquer função de Green é zero, isto é

$$\delta_{\text{BRS}} \langle 0 | T A_{\mu_1} \cdots \overline{\omega} \cdots \omega \cdots \psi \cdots \overline{\psi} \cdots | 0 \rangle = 0$$

- Vejamos duas aplicações simples do método

The non-renormalization of the longitudal photon propagator

Este resultado é equivalente, como é sabido, a dizer que a polarização do vácuo é transversal. Prova-se facilmente partindo da função de Green $\langle 0|\, T A_\mu \overline{\omega}\, |0\rangle$ e fazendo uso de

$$\delta_{\rm BRS} \langle 0|\, T A_\mu \overline{\omega}\, |0\rangle = 0$$

ou seja

$$\frac{1}{\xi} \langle 0|\, |T A_\mu \partial^\nu A_\nu \,|0\rangle\, \theta - \langle 0|\, T \partial_\mu \omega \overline{\omega}\, |0\rangle\, \theta = 0$$

Portanto

$$\frac{1}{\xi} k^\mu G_{\mu\nu}(k) = -k_\nu \Delta(k)$$

onde o propagador dos fantasmas é

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2}$$

pois os fantasmas não têm interacções.

The non-renormalization of the longitudal photon propagator

Multiplicando pelo inverso do propagador do fotão obtemos

$$\frac{1}{\xi} k^\mu = -i \frac{k_\nu}{k^2} G^{-1\nu\mu}(k)$$

e portanto

$$k_\nu G^{-1\nu\mu}(k) = \frac{i}{\xi} k^\mu k^2 = k_\nu G^{-1\nu\mu}_{(0)}(k)$$

o que mostra que a parte longitudinal não é renormalizada.

Ward Identity for the Vertex

Partimos de

$$\delta_{\rm BRS} \langle 0| T\overline{\omega}\psi\overline{\psi} |0\rangle = 0$$

Então

$$\frac{1}{\xi} \langle 0| T\partial^\mu A_\mu \psi\overline{\psi} |0\rangle = ie \langle 0| T\overline{\omega}\omega\psi\overline{\psi} |0\rangle - ie \langle 0| T\overline{\omega}\psi\overline{\psi}\omega |0\rangle$$

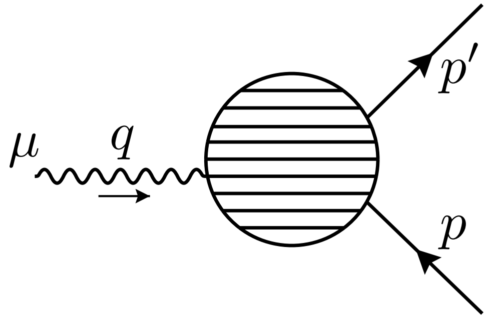
ou ainda

$$\frac{i}{\xi} q^\mu T_\mu = T$$

Ward Identity for the Vertex · · ·

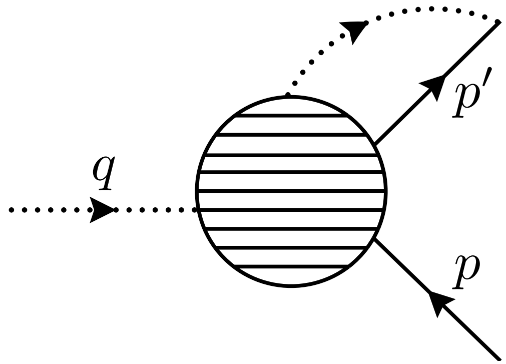
onde

$iT_\mu =$

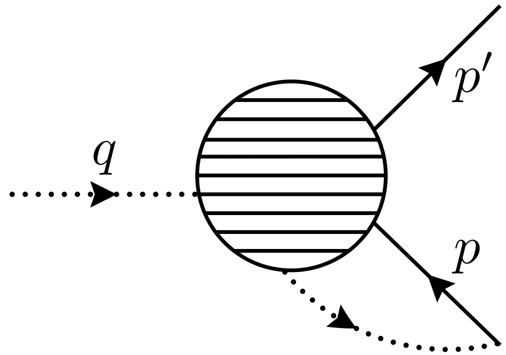


$= G_{\mu\nu}(q)S(p')i\Gamma^\nu S(p)$

$iT \quad = \quad -ie$



$+\, ie$



$$= \quad -ie\Delta(q)S(p) + ie\Delta(q)S(p')$$

Ward Identity for the Vertex $\cdots$

A última igualdade resulta dos fantasmas não terem interacções em QED numa gauge linear. Pondo tudo junto obtemos

$$\frac{i}{\xi} q^\mu G_{\mu\nu}(q) S(p') i\Gamma^\nu S(p) = -ie\Delta(q)S(p) + ie\Delta(q)S(p')$$

Usando

$$\frac{1}{\xi} k^\mu G_{\mu\nu}(k) = -k_\nu \Delta(k)$$

e multiplicando pelos inversos dos propagadores dos fermiões obtemos finalmente a identidade pretendida

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = ie\left[S^{-1}(p) - S^{-1}(p')\right]$$

Optical Theorem

A matriz S (Heisenberg 1942) pode-se escrever na forma

$$S = 1 + iT$$

Então a unitariedade, $SS^\dagger = 1$ implica

$$2\,\text{Im}T = TT^\dagger$$

Se inserirmos esta relação entre o mesmo estado inicial e final obtemos

$$\begin{aligned} 2\,\text{Im} < i|T|i > &= < i|TT^\dagger|i > \\ &= \sum_f | < f|T|i > |^2 \end{aligned}$$

onde introduzimos um conjunto completo de estados. Esta relação pode ainda escrever-se na forma

Optical Theorem · · ·

$$\sigma_{\text{total}} = 2\text{Im}\ T^{\text{elástica}}_{\text{frente}}$$

conhecida por teorema óptico. O que chamamos aqui σ_{total} não é exactamente a secção eficaz porque faltam os factores de fluxo. É rigorosamente a quantidade definida por

$$\sigma_{\text{total}} \equiv \sum_f |<f|T|i>|^2$$

A unitariedade estabelece portanto uma relação entre a secção eficaz total e a parte imaginária da amplitude elástica na direcção frontal (o estado inicial e final têm que ser o mesmo).

Cutkosky rules

- Para mostrar que a unitariedade é respeitada num dado processo é necessário saber calcular a parte imaginária de diagramas. Claro que há sempre a possibilidade de fazer as contas explícitas até ao fim e ver qual foi a parte imaginária que ficou, mas este processo não é muito conveniente para diagramas complicados.
- Assim existem regras, chamadas regras de Cutkosky que nos dão simplesmente a parte imaginária duma amplitude qualquer.
- **Regra 1**

  A parte imaginária duma amplitude obtém-se através da expressão

$$2\text{Im}\, T = -\sum_{\text{cortes}} T$$

- **Regra 2**

  O corte obtém-se escrevendo a amplitude $iT = \cdots$ e substituindo nesta expressão os propagadores das linhas cortadas pelas seguintes expressões

Cutkosky rules $\cdots$

- Campos Escalares

$$\Delta(p) \Longrightarrow 2\pi\theta(p^o)\delta(p^2 - m^2)$$

- Campos Spinoriais

$$S(p) \Rightarrow (\not p + m) 2\pi\theta(p^o)\delta(p^2 - m^2)$$

- Campos Spin 1 (na gauge de Feynman)

$$G_{\mu\nu}(p) \Rightarrow -g_{\mu\nu} 2\pi\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)$$

- Nestas expressões as funções θ asseguram o fluxo da energia. As regras de Cutkosky são um pouco complicados de mostrar em geral (ver G. 't Hooft, "Diagrammar", CERN Report 1972) mas nós vamos aqui mostrar dois casos e verificá-las explicitamente

Cutkosky rules: Propagador livre

A amplitude é

$$iT = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

A parte imaginária obtém-se explicitamente usando

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$$

logo

$$T = P\left(\frac{1}{p^2 - m^2}\right) - i\pi\delta(p^2 - m^2)$$

Cutkosky rules: Propagador livre

e portanto

$$2\text{Im}T = -2\pi\delta(p^2 - m^2)$$

Pela regra de Cutkosky obtemos imediatamente

$$2\text{Im}T = -2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$$

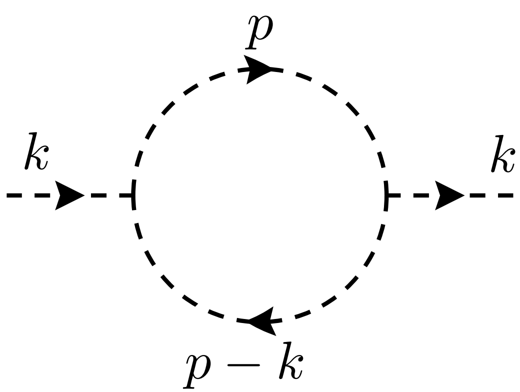
que é o mesmo resultado. A função $\theta(p^0)$ assegura que o fluxo da energia é da esquerda para a direita.

Cutkosky rules:Self-energy em ϕ^3

Consideremos a self-energy na teoria dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

O diagrama de self-energy é o representado na Figura



A amplitude correspondente é

$$iT = (i\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Cutkosky rules

Calculemos a parte imaginária de T por dois métodos, primeiro explicitamente e depois usando a regra de Cutkosky.
i) Cálculo explícito

$$
\begin{aligned}
iT &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
&= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot P - M^2 + i\varepsilon)^2} \\
&= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[(p+P)^2 - \Delta]^2}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{cases}
P = -x\, k \\
\Delta = P^2 + M^2 = m^2 - k^2 x(1-x) - i\varepsilon
\end{cases}
$$

Cutkosky rules

Então

$$iT = \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 - \Delta)^2}$$

O integral é divergente. Fazendo regularização dimensional obtemos finalmente

$$T = \frac{\lambda}{16\pi^2} \mu^\varepsilon \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \Delta^{-\left(2-\frac{d}{2}\right)}$$

Usando renormalização on-shell, $T_R(k^2 = m^2) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} T_R &= T - T(k^2 = m^2) \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left[\left(\frac{\Delta(k^2)}{\mu^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta(k^2=m^2)}{\mu^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right] \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - C + O(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[1 - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{m^2 - k^2 x(1-x) - i\varepsilon}{m^2 - m^2 x(1-x) - i\varepsilon}\right] \\ &= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln\left[\frac{1 - \beta x(1-x) - i\varepsilon}{1 - x(1-x) - i\varepsilon}\right] = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[L(\beta) - L(1)\right] \end{aligned}$$

Cutkosky rules

Onde $\beta = \frac{k^2}{m^2}$ e a função $L(\beta)$ é definida por

$$L(\beta) \equiv \int_0^1 dx \ln\left[1-\beta(1-x)x - i\varepsilon\right]$$

e satisfaz

$$\text{Im}L(\beta) = -\pi\sqrt{1-\frac{4}{\beta}}\;\theta(\beta-4)$$

Então

$$\text{Im}T = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left[\text{Im}L(\beta) - \text{Im}L(1)\right]$$

e obtemos finalmente

$$\text{Im}T = \frac{\lambda^2}{16\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}\;\theta\left(1-\frac{4m^2}{k^2}\right)$$

A função θ assegura que só há parte imaginária quando o estado intermédio puder ser final (produção de 2 partículas de massa m)

ii) Cálculo usando as Regras de Cutkosky

Usando as regras obtemos

$$\begin{aligned} 2\text{Im}T &= -(i\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\theta(p^0)\theta(k^0-p^0)\delta(p^2-m^2)\delta((p^2-k^2)-m^2) \\ &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4p'(2\pi)^2\theta(p^0)\theta(k^0-p^0)\delta(p^2-m^2)\delta(p'^2-m^2)\delta^4(p'-k+p) \end{aligned}$$

Usando agora

$$\int d^4p\theta(p^0)\delta(p^2-m^2) = \int d^3p\frac{1}{2p^0}$$

Cutkosky rules

obtemos

$$2\text{Im}T = \lambda^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^3p' \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} 2\pi\delta^4(p' - k + p)$$

ou ainda

$$2\text{Im}T = \lambda^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} 2\pi\delta(k^0 - p^0 - p'^0)$$

No referencial do centro de massa

$$k = (\sqrt{s}, \vec{0}) \ ; \ p = (\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}, \vec{p}) \ ; \ p' = (\sqrt{|\vec{p}'|^2 + m^2}, -\vec{p})$$

e portanto

Cutkosky rules

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Im}T &= \lambda^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4(|\vec{p}|^2+m^2)} 2\pi\delta(\sqrt{s}-2\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}) \\
&= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{|\vec{p}|^2+m^2} \frac{\delta(|\vec{p}|-\sqrt{\frac{s}{4}-m^2})}{\frac{2|\vec{p}|}{\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}}} \theta\left(1-\frac{4m^2}{s}\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{8\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\;\theta\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)
\end{aligned}
$$

Logo usando $k^2 = s$ obtemos

$$
\mathrm{Im}T = \frac{\lambda^2}{16\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}\;\theta\left(1-\frac{4m^2}{k^2}\right)
$$

que é de facto o mesmo resultado que o cálculo explícito

Example of Unitarity: scalars and fermions

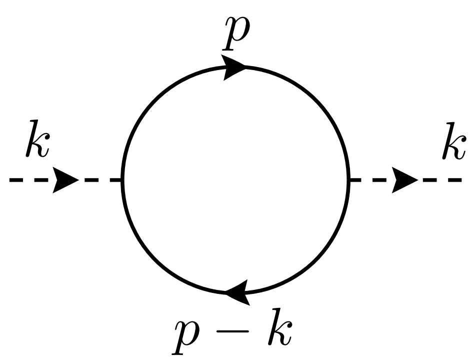
Consideremos a teoria descrita pelo seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \overline{i\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\overline{\psi}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + g\overline{\psi}\psi\phi$$

Vamos mostrar a unitariedade em 2 casos em que as linhas cortadas são fermiónicas

i) Self-energy dos escalares

A self energy dos escalares e dada pelo diagrama da Figura, a que corresponde a amplitude



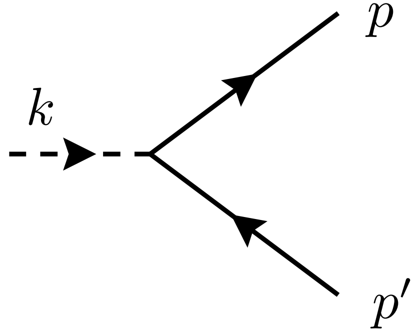
$$iT = g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr\left[\frac{i}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\frac{i}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\right]$$

Portanto

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}T &= -\sum_{\text{cuts}} T \\
&= -g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[(\not{p}+m)(\not{p}-\not{k}+m)](2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2) \\
&\qquad (2\pi)\theta(k^0-p^0)\delta((p-k)^2-m^2)
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a unitariedade calculemos

$$\sigma = \sum_f \Bigg| \qquad \Bigg|^2$$



Example of Unitarity: scalars and fermions $\cdots$

Obtemos

$$\sigma = \sum_f |ig\overline{u}(p)v(p')|^2 = -g^2 \sum_f \text{Tr}[(\not{p} + m)(-\not{p}' + m)]$$

onde se usou $\sum_{\text{spins}} v(p')\overline{v}(p) = -(-\not{p}' + m)$ e $\sum_{\text{spins}} u(p)\overline{u}(p') = \not{p} + m$. Logo

$$\sigma = -g^2 \int d\rho_2 \text{Tr}[(\not{p} + m)(-\not{p}' + m)]$$

onde $d\rho_2$ é o espaço de fase de duas partículas, isto é

$$\int d\rho_2 \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} (2\pi)^4 \delta^4(k - p - p')$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)(2\pi)\theta(p'^0)\delta(p'^2 - m^2)(2\pi)^4\delta^4(k-p-p')$$

Example of Unitarity: scalars and fermions $\cdots$

Daqui se conclui que

$$\sigma = -\,g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)(2\pi)\theta(k^0-p^0)\delta((p-k)^2-m^2)$$
$$\text{Tr}[(\not{p}+m)(\not{p}-\not{k}+m)]$$

e obtemos portanto finalmente

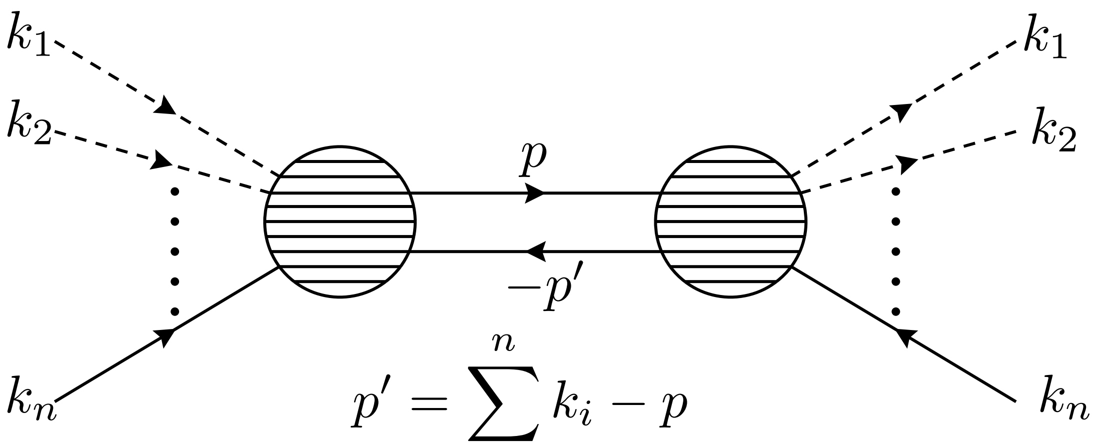
$$2\text{Im}T = \sigma$$

como queríamos mostrar.

Example of Unitarity: scalars and fermions $\cdots$

ii) Caso geral

Consideremos o caso geral com 2 linhas internas de fermiões. A amplitude iT é representada pelo seguinte diagrama



$$\equiv iT$$

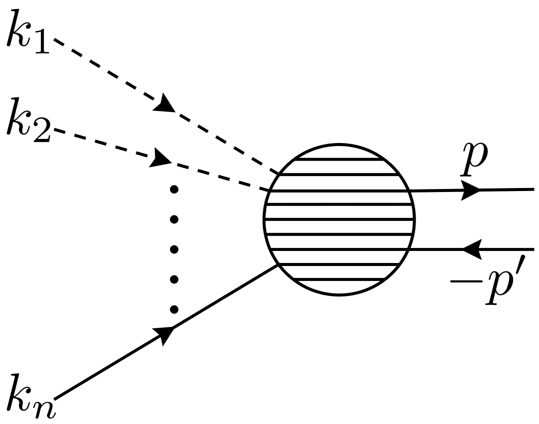
$$p' = \sum_{i=1}^{n} k_i - p$$

A amplitude iT escreve-se

$$iT = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\overline{T'} S(p) T' S(-p')\right]$$

onde a amplitude iT' é, por sua vez, definida pelo diagrama seguinte

Example of Unitarity: scalars and fermions $\cdots$



$$\equiv \overline{u}(p) i T' v(p')$$

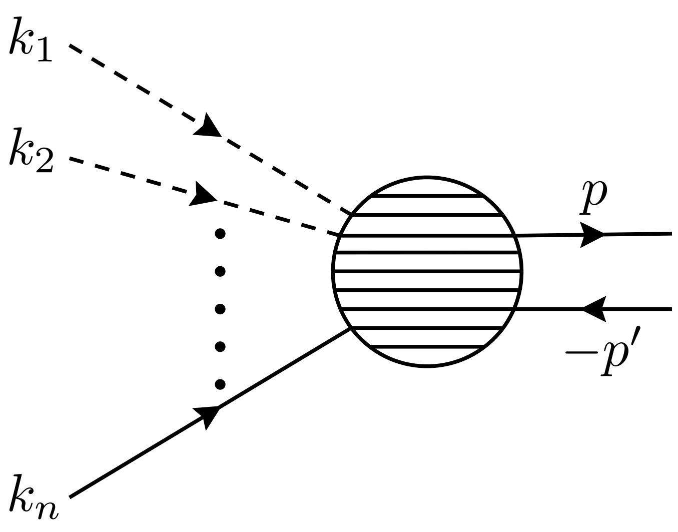
Então

$$\begin{aligned}
2\,\mathsf{Im}T &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)\delta(p'^2-m^2)\theta(p'^0)\cdot \\
&\qquad \mathsf{Tr}\left[\overline{T'}(\not p+m)T'(-\not p'+m)\right] \\
&= -\int d\rho_2 \mathsf{Tr}\left[\overline{T'}(\not p+m)T'(-\not p'+m)\right]
\end{aligned}$$

Example of Unitarity: scalars and fermions $\cdots$

Por outro lado

$$\sigma = \sum_f \Bigg|$$



$$\Bigg|^2$$

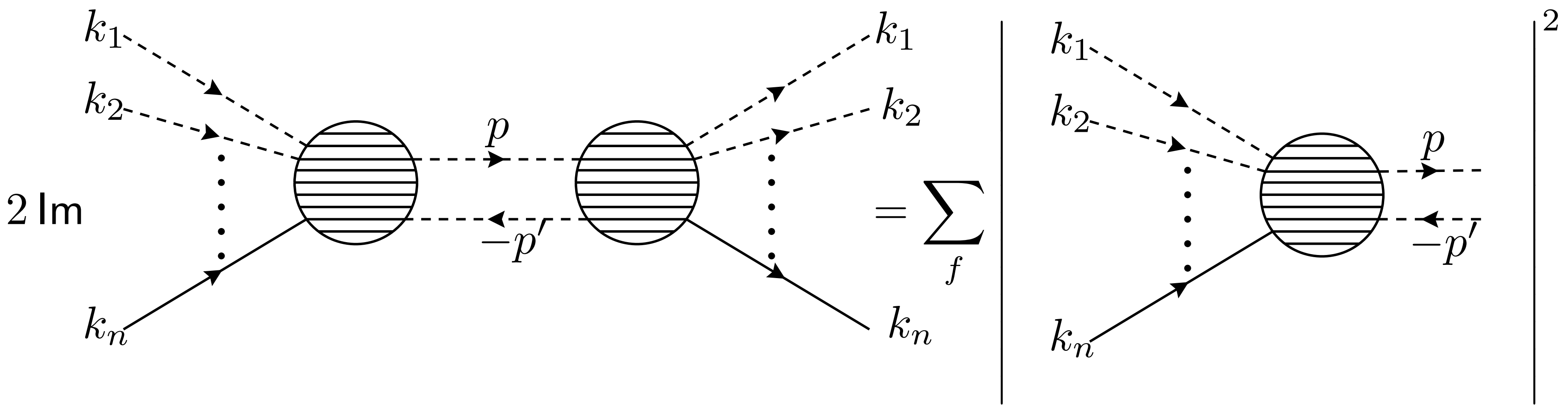
$$= \sum_f |\overline{u}(p) T' v(p')|^2$$

$$= -\int d\rho_2 \mathsf{Tr}\Big[(\not p + m) T' (-\not p' + m) \overline{T'}\Big]$$

Portanto

$$\sigma = 2\text{Im}T$$

Se as linhas cortadas fossem de escalares em vez de fermiões o resultado seria o mesmo, não haveria o sinal menos do loop mas também não haveria o sinal menos da soma dos spins



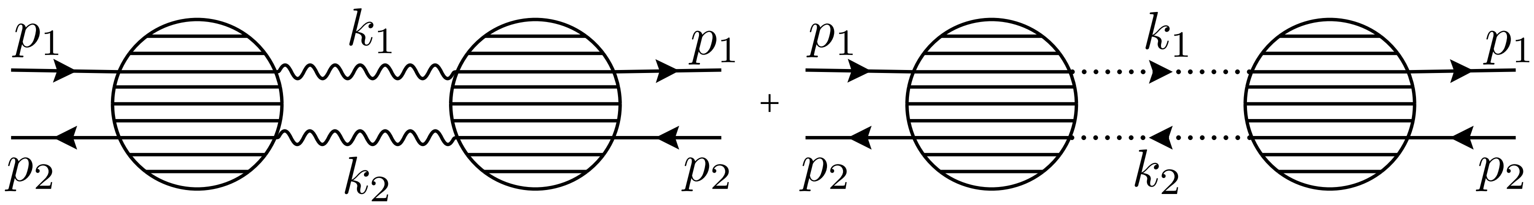
Unitarity and gauge fields

- Na secção anterior demonstrou-se a unitariedade das teorias com escalares e spinores.
- Vamos aqui ver que a demonstração da unitariedade para o caso dos campos de gauge é mais complicada e exige o uso das identidades de Ward.
- O problema reside no facto que os campos de gauge em linhas internas podem ter polarizações não físicas enquanto que no estado final o não podem.
- Esta diferença levaria a uma violação da unitariedade se as linhas internas não pudessem ser também de fantasmas que compensam os graus de liberdade a mais.

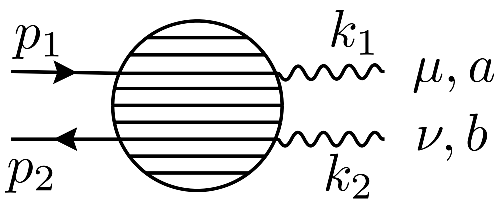
Unitarity and gauge fields $\cdots$

Consideremos as seguintes amplitudes

$iT =$

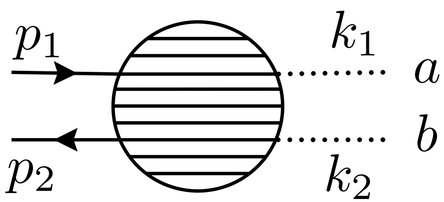


$iT^{ab}_{\mu\nu} =$



$$k_2 = p_1 + p_2 - k_1$$

$iT^{ab} =$



Unitarity and gauge fields · · ·

Então a amplitude escreve-se (o factor $1/2$ é o factor de simetria dum loop com campos de gauge. O sinal $-$ é devido ao loop de fantasmas)

$$iT = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} G^{aa'}_{\mu\mu'}(k_1) G^{bb'}_{\nu\nu'}(k_2) T^{*a'b'\mu'\nu'} - T^{ab}\Delta^{aa'}(k_1)\Delta^{bb'}(k_2) T^{*a'b'} \right\}$$

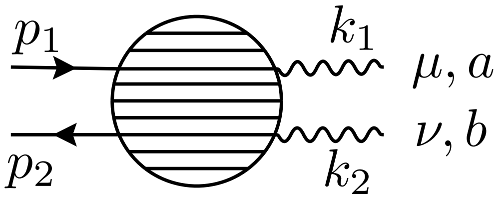
Aplicando as regras de Cutkosky a parte imaginária é

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Im}T &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\theta(k_1^0)\theta(k_2^0)\delta(k_1^2)\delta(k_2^2) \left\{ \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab}T^{*ab} \right\} \\ &\equiv \int d\rho_2 \left[\frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab}T^{*ab} \right] \end{aligned}$$

Unitarity and gauge fields · · ·

Calculemos agora σ_{tot}. Como os fantasmas não são físicos teremos

$$\sigma = \sum \left| \quad \right|^2$$



$$= \frac{1}{2} \int d\rho_2 \sum_{Pol} \left| \varepsilon^\mu(k_1) \varepsilon^\nu(k_2) T^{ab}_{\mu\nu} \right|^2$$

onde o factor $1/2$ se deve agora a haver partículas idênticas no estado final. Pondo

$$\sum_{Pol} \varepsilon^\mu(k_1) \varepsilon^{\mu'*}(k_1) = P^{\mu\mu'}(k_1)$$

obtemos

$$\sigma = \int d\rho_2 \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab}_{\mu'\nu'} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2)$$

Unitarity and gauge fields ···

Usando agora o resultado (ver problemas)

$$P^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu}{k \cdot \eta}$$

onde η^μ é um 4-vector que satisfaz $\eta \cdot \varepsilon$ e $\eta^2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab}_{\mu'\nu'} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2) = \\
= \quad & \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - \frac{1}{2}(T^{ab} \cdot k_2) \cdot (T^{*ab} \cdot \eta) \frac{1}{k_2 \cdot \eta} \\
& -\frac{1}{2}(T^{ab} \cdot \eta) \cdot (T^{*ab} \cdot k_2) \frac{1}{k_2 \cdot \eta} - \frac{1}{2}(k_1 \cdot T^{ab}) \cdot (\eta \cdot T^{*ab}) \frac{1}{k_1 \cdot \eta} \\
& -\frac{1}{2}(\eta \cdot T^{ab}) \cdot (k_1 \cdot T^{*ab}) \frac{1}{k_1 \cdot \eta} + \left[\frac{1}{2}(k_1 \cdot T^{ab} \cdot \eta)(\eta \cdot T^{*ab} \cdot k_2) + \right. \\
& + \frac{1}{2}(k_1 \cdot T^{ab} \cdot k_2)(\eta \cdot T^{*ab} \cdot \eta) + \frac{1}{2}(\eta \cdot T^{ab} \cdot \eta)(k_1 T^{*ab} \cdot k_2) \\
& \left. + \frac{1}{2}(\eta \cdot T^{ab} \cdot k_2)(k_1 \cdot T^{*ab} \cdot \eta) \right] \frac{1}{(k_1 \cdot \eta)(k_2 \cdot \eta)}
\end{aligned}$$

Unitarity and gauge fields $\cdots$

Fazendo uso das identidades de Ward (ver problemas),

$$\begin{aligned} k_1^{\mu} T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{2\nu} T^{ab} \\ k_2^{\mu} T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{1\nu} T^{ab} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad k_1 \cdot T^{ab} \cdot k_2 = 0$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab}_{\mu'\nu'} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2) = \\ &= \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{ab} (k_1 \cdot T^{*ab} \cdot \eta) \frac{1}{k_2 \cdot \eta} \\ &\quad - \frac{1}{2} T^{*ab} (k_1 \cdot T^{ab} \cdot \eta) \frac{1}{k_2 \cdot \eta} - \frac{1}{2} T^{ab} (\eta \cdot T^{*ab} \cdot k_2) \frac{1}{k_1 \cdot \eta} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\eta \cdot T^{ab} \cdot k_2) T^{*ab} \frac{1}{k_1 \cdot \eta} + \frac{1}{2} T^{ab} T^{*ab} + \frac{1}{2} T^{ab} T^{*ab} \\ &= \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab} T^{*ab} \end{aligned}$$

Unitarity and gauge fields $\cdots$

Portanto

$$\sigma = \int d\rho_2 \left[\frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab} T^{*ab} \right]$$

o que comparando com a expressão para $2\,\text{Im}T$ dá

$$\sigma = 2\text{Im}T$$

como queríamos mostrar.