



Advanced Quantum Field Theory

Chapter 7

Renormalization Group

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

Fall 2013

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

Lecture 12

Lecture 12

Renormalization

● Momentum sub.

- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Em teoria quântica dos campos um esquema de renormalização tem duas componentes. Primeiro há um processo de *regularização* que isola os infinitos que aparecem nos diagramas de Feynman. A regularização é arbitrária desde que mantenha as simetrias da teoria. Para teorias sem campos de gauge há muitos processos alternativos. Para teorias de gauge o melhor processo parece ser a regularização dimensional.
- Depois de regularizada a teoria teremos que especificar um método sistemático para remover as divergências e definir os parâmetros renormalizados de teoria. A este processo chamamos esquema de renormalização. Há uma grande arbitrariedade na escolha do processo de subtração. A física contudo não pode depender desta escolha. Este é o conteúdo do grupo de renormalização: *O conteúdo físico de teoria deve ser invariante para transformações que apenas mudem as condições de normalização.*
- Vamos começar por estudar os chamados esquemas com subtração de momento. Conforme o ponto no espaço dos momentos externos que serve de definição às funções de Green irreduzíveis, podemos ter várias formas deste esquema. Vamos exemplificar com a teoria $\lambda\phi^4$.

Esta definição corresponde a uma série de Taylor para os momentos exteriores on-shell. Para a self-energy isto dá

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) + \tilde{\Sigma}(p^2)$$

com as condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Sigma}(m^2) = 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m^2} = 0 \end{array} \right.$$

Em termos de $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$ dado por

$$\Gamma_R^2(p) = p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)$$

Obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R^{(2)}(m^2) = 0 \\ \left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m^2} = 1 \end{array} \right.$$

Para $\Gamma_R^{(4)}$ uma escolha conveniente é

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -\lambda \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i^2 = m^2 \\ s = t = u = \frac{4m^2}{3} \end{array} \right.$$

Neste caso os parâmetros m^2 e λ são a massa física e, a menos de factores cinemáticos, a secção eficaz para $s = t = u = \frac{4}{3}m^2$ respectivamente.

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- **Intermediate ren.**
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Este esquema corresponde a uma expansão de Taylor em torno de momentos nulos.

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)p^2 + \tilde{\Sigma}(p^2)$$

A parte finita $\tilde{\Sigma}(p^2)$ obedece às condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Sigma}(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 0 \end{array} \right.$$

que traduzidas em termos de $\Gamma_R^{(2)}$ se escrevem

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R^{(2)}(0) = m^2 \\ \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2} = 1 \end{array} \right.$$

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

- Momentum sub.
- On-Shell
- **Intermediate ren.**
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

Para $\Gamma_R^{(4)}$ a condição é

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -\lambda \quad \text{para} \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

Neste esquema m^2 não é a massa física e λ não é nenhuma quantidade mensurável pois os pontos $p_i = 0$ não pertencem à região física. Podemos no entanto exprimir todas as quantidades mensuráveis em termos destes dois parâmetros, como veremos adiante

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.

• **General case**

- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Os dois exemplos anteriores são casos particulares do esquema geral onde as condições de normalização podem ser funções de vários *momentos de referência* $\xi_1, \xi_2 \dots$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R^{(2)}(\xi_1^2) = m^2 \\ \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = \xi_2^2} = 1 \\ \Gamma_R^{(4)}(\xi_3, \xi_4, \xi_5) = -\lambda \end{array} \right.$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case

• RG

- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Consideremos dois esquemas de renormalização R e R' . Como ambos partem do mesmo Lagrangeano não renormalizado

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \Delta\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_{R'} + \Delta\mathcal{L}_{R'}$$

devemos ter

$$\phi_R = Z_\phi^{-1/2}(R)\phi_0 \quad ; \quad \phi'_R = Z_\phi^{-1/2}(R')\phi_0 .$$

Logo

$$\phi'_R = Z_\phi^{-1/2}(R', R)\phi_R$$

onde

$$Z_\phi(R', R) = \frac{Z_\phi(R')}{Z_\phi(R)}$$

Estas relações indicam que os campos renormalizados em diferentes esquemas estão relacionados por uma constante multiplicativa. Esta constante é finita pois tanto $\phi_{R'}$ como ϕ_R são finitos. De modo semelhante

$$\lambda_{R'} = Z_\lambda^{-1}(R', R) Z_\phi^2(R', R) \lambda_R$$

$$m_{R'}^2 = m_R^2 + \delta m^2(R', R)$$

onde

$$Z_\lambda(R', R) = \frac{Z_\lambda(R')}{Z_\lambda(R)}$$

$$\delta m^2(R', R) = \delta m^2(R') - \delta m^2(R)$$

são quantidades finitas. A operação que leva as quantidades num esquema de renormalização R para outro esquema R' pode ser vista como uma transformação de R em R' . O conjunto de todas estas transformações forma o *Grupo de Renormalização*.

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Vamos agora ver como dar uma expressão analítica à invariância para transformações do grupo de renormalização. A forma da equação do grupo de renormalização depende do esquema de renormalização utilizado. Vamos aqui obter as equações do GR para o esquema com subtração de momento, a chamada equação de Callan - Symanzik.
- Notemos primeiro que

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} \left(\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \right) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} (-i) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$$

isto é, a derivação dum função de Green não renormalizada em relação à massa despida é equivalente à inserção dum operador composto $\frac{1}{2}\phi^2$ levando momento zero, isto é

$$\frac{\partial \Gamma^{(n)}(p_i)}{\partial m_0^2} = -i \Gamma_{\phi^2}^{(n)}(0, p_i)$$

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

As funções Green irreduzíveis renormalizadas são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda; m) = Z_\phi^{(n/2)} \Gamma^{(n)}(p_i; \lambda_0; m_0) \\ \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(p; p_i; \lambda; m) = Z_{\phi^2}^{-1} Z_\phi^{n/2} \Gamma_{\phi^2}^{(n)}(p; p_i; \lambda_0; m_0) \end{array} \right.$$

Então a equação anterior escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} \left[Z_\phi^{-n/2} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m) \right] = -i Z_{\phi^2} Z_\phi^{-n/2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(0, p_i, \lambda, m)$$

e portanto

$$-\frac{n}{2} Z_\phi^{-1} \frac{\partial Z_\phi}{\partial m_0^2} Z_\phi^{-n/2} \Gamma_R^{(n)} + Z_\phi^{-n/2} \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_R^{(n)} = -i Z_{\phi^2} Z_\phi^{-n/2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(0, p_i, \lambda, m)$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Obtemos portanto

$$\left[\frac{\partial}{\partial m_0^2} - \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial m_0^2} \right] \Gamma_R^{(n)} = -i Z_{\phi^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$$

$$\left[\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2} \frac{\partial m}{\partial m^2} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \lambda}{\partial m_0^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial m_0^2} \right] \Gamma_R^{(n)} = -i Z_{\phi^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$$

ou ainda

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma \right] \Gamma_R^{(n)} = -im^2 \alpha \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$$

que é a equação de Callan - Symanzik para a teoria ϕ^4 , onde α , β e γ são funções sem dimensões

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\beta = 2m^2 \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial m_0^2}}{\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}}$$

$$\gamma = m^2 \frac{\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial m_0^2}}{\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}}$$

$$\alpha = 2 \frac{Z_{\phi^2}}{\frac{\partial m}{\partial m_0^2}}$$

A função α está relacionada com γ . De facto se escolhermos as condições de normalização a $p_i = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R^{(2)}(0, \lambda, m) = -m^2 \\ \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, 0, \lambda, m) = i \end{array} \right.$$

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG

- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Obtemos

$$\alpha = 2(\gamma - 1)$$

Como as quantidades $\Gamma_R^{(n)}$ e $\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ não dependem do cut - off, esperamos também que α , β e γ sejam independentes do cut - off. Para vermos isso pomos $n = 2$ e diferenciamos em ordem a p^2

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2\gamma \right] \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p, \lambda, m) = -im^2 \alpha \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p, \lambda, m)$$

Pondo $p^2 = 0$ e usando

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 1$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Obtemos

$$\gamma = im^2(\gamma - 1) \left[\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p, \lambda, m) \right]_{p^2=0}$$

o que demonstra que γ é independente do cut - off. Então $\alpha = 2(\gamma - 1)$ também o é e todas as funções excepto β são agora independentes do cut - off. Portanto β também o é. Como α, β e γ são sem dimensões e não dependem do cut - off, então são somente funções da constante de acoplamento que também não tem dimensões, isto é

$$\alpha = \alpha(\lambda)$$

$$\beta = \beta(\lambda)$$

$$\gamma = \gamma(\lambda)$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Nós vamos sobretudo estar interessados no esquema de subtracção mínima, por isso não vamos agora calcular as funções α , β e γ para todas as teorias, faremos isso adiante. Indicaremos no entanto um método expedito para o seu cálculo. Seja por exemplo a função $\beta(\lambda)$. Notando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial m_0^2}(\lambda_0, \Lambda/m) &= \frac{\partial m^2}{\partial m_0^2} \frac{\partial}{\partial m^2} \lambda(\lambda_0, \Lambda/m) \\ &= \frac{\partial m^2}{\partial m_0^2} \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial m} \lambda(\lambda_0, \Lambda/m) \end{aligned}$$

obtemos da definição 1

$$\beta = m \frac{\partial}{\partial m} \lambda(\lambda_0, \Lambda/m) = m \frac{\partial}{\partial m} [\bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/m) \lambda_0] = -\lambda_0 \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} [\bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/m)]$$

ou

$$\beta = -\lambda \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} [\ln \bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/m)]$$

onde, por definição $\lambda = \bar{Z} \lambda_0$, e portanto $\bar{Z} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- **Callan - Symanzik**
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

O resultado de 1 - loop dá

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + O(\lambda_0^2)$$

$$Z_\phi = 1 + O(\lambda_0^2)$$

logo

$$\bar{Z} = 1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots$$

e

$$\ln \bar{Z} = \frac{3\lambda_0}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} + \dots$$

Portanto para ϕ^4

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3) .$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

O teorema de Weinberg diz respeito ao comportamento assintótico das funções de Green $1PI$ na região Euclédiana ($p_i^2 < 0$) e para valores não excepcionais dos momentos (nenhuma soma parcial é nula).

Teorema

Se os momentos não forem excepcionais e se os parametrizarmos com $p_i = \sigma k_i$ as funções de Green irreduzíveis de uma partícula $\Gamma_R^{(n)}$ comportam-se na região euclédiana profunda ($\sigma \rightarrow \infty$ e k_i fixos, $p_i^2 < 0$) do modo seguinte

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Gamma^{(n)}(\sigma k_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} [a_0 (\ln \sigma)^{b_0} + a_1 (\ln \sigma)^{b_1} + \dots]$$

e

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Gamma_{\phi^2}^{(n)}(\sigma k_i, \lambda, m) = \sigma^{2-n} [a'_0 (\ln \sigma)^{b'_0} + a'_1 (\ln \sigma)^{b'_1} + \dots]$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- ❑ Não faremos a demonstração (ver Bjorken and Drell) mas notemos que as potências de σ são as dimensões canónicas das funções de Green (em termos da massa).
- ❑ Se este comportamento é o verificado assintoticamente depende da soma da série dos logaritmos.
- ❑ Se esta somar para uma potência de σ , por exemplo $\sigma^{-\gamma}$, então assintoticamente o comportamento canónico σ^{4-n} é modificado para $\sigma^{4-n-\gamma}$. γ é chamada a *dimensão anómala*.
- ❑ Como vamos ver o GR vai efectuar esta soma de logaritmos e dar-nos qual a dimensão anómala.

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.

Do teorema de Weinberg temos que $\Gamma_R^{(n)} \gg \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ para qualquer ordem (finita) em λ na região euclidiana profunda ($\sigma \rightarrow \infty$). Se admitirmos que isto continua verdade mesmo depois de somar todas as ordens de teoria de perturbações, então podemos desprezar o segundo membro da equação de Callan-Symanzik e obtemos uma equação diferencial homogénea

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(p_i, \lambda, m) = 0$$

onde $\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}$ é a forma assintótica de $\Gamma_R^{(n)}$. O significado desta equação é que nesta região assintótica, uma mudança no parâmetro de massa pode ser sempre compensada por mudanças apropriadas do acoplamento e da escala dos campos. Para resolver esta equação começamos por definir uma quantidade $\bar{\Gamma}_R^{(n)}$ sem dimensões, usando análise dimensional

$$\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(p_i, \lambda, m) = m^{4-n} \bar{\Gamma}_R^{(n)}(p_i/m, \lambda) .$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.

• Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$\bar{\Gamma}_R^{(n)}$ satisfaz

$$\left(m \frac{\partial}{\partial m} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \bar{\Gamma}_R^{(n)} \left(\sigma \frac{p_i}{m}, \lambda \right) = 0 .$$

Então

$$\left(m \frac{\partial}{\partial m} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) m^{n-4} \Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0$$

ou seja

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + (n - 4) \right] \Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0$$

Usando esta equação podemos trocar a derivação em ordem à massa pela derivação em ordem à escala na equação de Callan-Symanzik para obter

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- **Asymptotic solution**

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + (n - 4) \right] \Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0$$

Para resolver esta equação removemos os termos sem derivadas com a transformação

$$\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} F^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) .$$

Substituindo na equação diferencial vemos que os termos sem derivadas desaparecem e obtemos uma equação diferencial para $F^{(n)}$

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] F^{(n)}(\sigma p, \lambda, m) = 0$$

Introduzindo $t = \ln \sigma$ podemos escrever

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.

• Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] F^{(n)}(e^t p, \lambda, m) = 0$$

Para resolver esta equação introduzimos a constante de acoplamento efectiva $\bar{\lambda}(t, \lambda)$ como solução da equação

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda})$$

com a condição fronteira $\bar{\lambda}(0, \lambda) = \lambda$. Para vermos que esta definição nos vai dar a solução, escrevemos

$$t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \frac{dx}{\beta(x)}$$

e diferenciamos em ordem a λ

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.

• Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$0 = \frac{1}{\beta(\bar{\lambda})} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{1}{\beta(\lambda)}$$

ou ainda

$$\beta(\bar{\lambda}) - \beta(\lambda) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} = 0$$

Usando agora a definição de $\bar{\lambda}$ obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \bar{\lambda}(t, \lambda) = 0$$

O operador diferencial é exactamente o mesmo da equação para $F^{(n)}(e^t p, \lambda, m)$. Portanto $F^{(n)}$ satisfaz aquela equação se depender da t e λ através de $\bar{\lambda}(t, \lambda)$.

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.
- **Asymptotic solution**

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Portanto a solução geral de $\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}$ é

$$\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} F^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), m)$$

Para se obter uma interpretação física desta solução notemos que

$$\begin{aligned} e^{n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} &= e^{n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} e^{n \int_{\bar{\lambda}}^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} \\ &= e^{n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} e^{-n \int_{\bar{\lambda}}^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} \\ &= e^{n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} e^{-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t', \lambda)) dt'} \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t', \lambda)) dt'} e^{-n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx} F^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), m)$$

Lecture 12

Renormalization

- Momentum sub.
- On-Shell
- Intermediate ren.
- General case
- RG
- Callan - Symanzik
- Weinberg's Th.

• Asymptotic solution

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Se pusermos $\sigma = 1(t = 0)$, vemos que $e^{n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma}{\beta} dx} F^{(n)}$ é $\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}$. Então obtemos finalmente a solução da equação do GR.

$$\Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t', \lambda)) dt'} \Gamma_{\text{asy}}^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), m)$$

- Nesta forma a solução tem uma interpretação simples. O efeito de efectuar uma mudança de escala nos momentos p_i nas funções de Green $\Gamma_R^{(n)}$ é equivalente a substituir a constante de acoplamento λ , pela constante de acoplamento efectiva $\bar{\lambda}$ à parte factores multiplicativos.
- O primeiro é simplesmente resultante do facto de $\Gamma_R^{(n)}$ ter dimensão canónica $4 - n$ em unidades de massa.
- O factor exponencial é o termo da dimensão anómala que resultou de somar todos os logaritmos em teoria de perturbações.
- Este factor é controlado por γ , a dimensão anómala. Veremos à frente como calcular a dimensão anómala, numa teoria qualquer.

Vamos agora ver outras formas que pode tomar a equação do grupo de renormalização. A afirmação que a renormalização é multiplicativa pode ser escrita na forma

$$\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda_0, m_0) = Z_\phi^{-n/2} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu)$$

onde μ é a escala usada para definir a normalização das funções de Green. O lado esquerdo da equação não depende de μ , mas o lado direito depende explicitamente e implicitamente através de λ e m . Então temos

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[Z_\phi^{-n/2} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu) \right] = 0$$

ou seja

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma \right) \Gamma_R^{(n)} = 0$$

- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

□ Onde

$$\beta \left(\lambda, \frac{m}{\mu} \right) = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$$

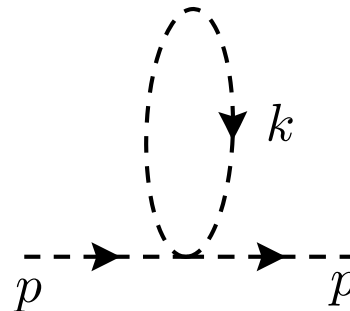
$$\gamma_m \left(\lambda, \frac{m}{\mu} \right) = \mu \frac{\partial \ln m}{\partial \mu}$$

$$\gamma \left(\lambda, \frac{m}{\mu} \right) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu}$$

- Esta equação tem a vantagem sobre a equação de Callan - Symanzik de ser homogénea. A dificuldade reside nas funções β e γ dependerem de duas variáveis λ e $\frac{m}{\mu}$ e portanto a equação ser de difícil resolução.
- Existe contudo um esquema de renormalização em que a dependência em m/μ desaparece e portanto a equação é simples de resolver. É o chamado esquema de subtracção mínima (MS) que passamos a expôr.

- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

- O esquema de subtracção mínima (MS) está relacionado com o método de regularização dimensional. As divergências dos integrais aparecem neste método como pólos em $\frac{1}{\varepsilon}$ onde $\varepsilon = 4 - d$.
- O esquema de subtracção mínima consiste em escolher os contratermos para cancelar *somente* os pólos.
- Vamos exemplificar com a *self-energy* em $\lambda\phi^4$, a que corresponde o seguinte diagrama



- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Temas

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= (-i\lambda)\mu^\varepsilon \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &= -i\lambda \frac{1}{32\pi^2} \mu^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - d/2)}{m^{2-d}} 2^\varepsilon \pi^{\varepsilon/2}
 \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = 4 - d$. Então

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p^2) &= \lambda \frac{1}{32\pi^2} \mu^\varepsilon \frac{\Gamma(-1 + \varepsilon/2)}{m^{-2+\varepsilon}} (2\sqrt{\pi})^\varepsilon \\
 &= \lambda \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon \Gamma(-1 + \varepsilon/2) (2\sqrt{\pi})^\varepsilon
 \end{aligned}$$

- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Usando (γ é a constante de Euler e $\psi(x)$ a derivada logaritmica da função Γ)

$$\Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = - \left[\frac{2}{\varepsilon} + \overbrace{1 - \gamma}^{\psi(2)} + O(\varepsilon) \right]$$

e

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)$$

obtemos

$$\Sigma(p^2) = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(2) + 2 \ln(\mu/m) + 2 \ln 2\sqrt{\pi} + O(\varepsilon) \right]$$

Portanto no esquema de subtracção mínima devemos adicionar um contratermo

$$\Delta\mathcal{L}_{\phi^2}^{MS} = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \phi^2$$

Se tivéssemos feito subtracção de momento à escala μ , isto é $\Sigma_R(p^2 = \mu^2) = 0$ teríamos o contratermo

$$\Delta\mathcal{L}_{\phi^2}^{\text{MOM}} = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\psi(2) + \ln(\mu/m) + \ln 2\sqrt{\pi} \right] \phi^2$$

Vemos assim que o Lagrangeano de contratermos no esquema de subtracção mínima quando expandido em série de Laurent em ε contém só termos divergentes. Portanto

$$\phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi$$

$$m_0 = Z_m m$$

$$\lambda_0 = \mu^\varepsilon Z_\lambda \lambda$$

- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

As constantes de renormalização Z_ϕ , Z_m e Z_λ têm a forma

$$Z_\lambda = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)/\varepsilon^r$$

$$Z_m = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(\lambda)/\varepsilon^r$$

$$Z_\phi = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(\lambda)/\varepsilon^r$$

Assim os coeficientes da equação do grupo de renormalização são independentes de μ , e como são adimensionais, também são independentes de m dependendo somente da constante de acoplamento. Isto simplifica a solução da equação do grupo de renormalização

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma \right) \Gamma_R^{(n)} = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

• RG Eq for MS

- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Usando análise dimensional

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + (n - 4) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right] \Gamma_R(\sigma p, m, \lambda, \mu) = 0$$

e podemos escrever

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - (\gamma_m - 1) m \frac{\partial}{\partial m} + n\gamma + (n - 4) \right] \Gamma_R(\sigma p, m, \lambda, \mu) = 0$$

que tem a solução

$$\Gamma_R(\sigma p_i, m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} e^{-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt'} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{m}(t), \bar{\lambda}(t), \mu)$$

onde se introduziram a massa efectiva $\bar{m}(t)$ e a constante de acoplamento efectiva $\bar{\lambda}(t)$ definidas por

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

• RG Eq for MS

- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta(\bar{\lambda}) \quad ; \quad \bar{\lambda}(t=0) = \lambda \\ \frac{d\bar{m}(t)}{dt} = [\gamma_m(\bar{\lambda}) - 1] \bar{m}(t) \quad ; \quad \bar{m}(t=0) = m \end{array} \right.$$

A solução desta equação é

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= m e^{\int_0^t [\gamma_m(\bar{\lambda}(t')) - 1] dt'} \\ &= m e^{-t} e^{\int_0^t \gamma_m(\bar{\lambda}(t')) dt'} \\ &= m e^{-t} e^{\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} dx \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)}} \end{aligned}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- **Physical parameters**
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Os parâmetros definidos pelo esquema de subtração mínima não são parâmetros físicos. Os parâmetros físicos podem no entanto ser calculados em função deles. Por parâmetro físico entendemos um elemento de matriz S ou a posição do pólo no propagador. Para eles é válido o teorema seguinte,

Teorema

Qualquer parâmetro físico $P(\lambda, m, \mu)$ satisfaz a seguinte equação do grupo de renormalização

$$\mathcal{D}P(\lambda, m, \mu) \equiv \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] P(\lambda, m, \mu) = 0$$

Dem: Consideremos primeiro o propagador escalar $\Delta(p^2)$ que satisfaz a equação do grupo de renormalização

$$[\mathcal{D} + 2\gamma] \Delta(p^2, \lambda, m, \mu) = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- **Physical parameters**
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Podemos escrever uma série de Laurent em volta do pólo em $p^2 = m_p^2$

$$\Delta(p^2, \lambda, m, \mu) = \frac{R^2}{p^2 - m_p^2} + \tilde{\Delta}$$

A posição do pólo $m_p(\lambda, m, \mu)$ e o resíduo $R^2(\lambda, m, \mu)$ satisfazem as equações do grupo de renormalização que podem ser obtidas por aplicação do operador $(\mathcal{D} + 2\gamma)$ à equação anterior. Igualando os resíduos dos pólos obtemos

$$\mathcal{D}m_p(\lambda, m, \mu) = 0$$

$$[\mathcal{D} + \gamma(\lambda)]R(\lambda, m, \mu) = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS

- **Physical parameters**

- Calculate $\beta \dots$

- β & γ properties

- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Demonstrámos portanto o teorema para a massa física. Para um elemento da matriz S temos ($S_R = R^n \Gamma^{(n)}$)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} \lim_{p_i^2 \rightarrow m_p^2} R^n \Gamma^{(n)} &= \lim_{p_i^2 \rightarrow m_p^2} \mathcal{D}(R^n \Gamma^n) \\
 &= \lim_{p_i^2 \rightarrow m_p^2} [n \mathcal{D} R R^{n-1} \Gamma^n + R^n \mathcal{D} \Gamma^n] \\
 &= \lim_{p_i^2 \rightarrow m_p^2} [-n\gamma + n\gamma] R^n \Gamma^n = 0
 \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

Veremos à frente como estes resultados podem ser usados para relacionar os parâmetros físicos com os parâmetros da teoria.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Vimos anteriormente que

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi \\ m_0 = Z_m m \\ \lambda_0 = \mu^\epsilon Z_\lambda \lambda \end{array} \right.$$

e que as constantes de renormalização têm a forma.

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_\lambda = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)/\epsilon^r \\ Z_m = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(\lambda)/\epsilon^r \\ Z_\phi = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(\lambda)/\epsilon^r . \end{array} \right.$$

Veamos como se calculam β , γ_m e γ .

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

i) Cálculo de $\beta(\lambda)$

Por definição

$$\beta(\lambda) = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$$

Esta quantidade é finita no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto quer dizer que antes de fazermos $\varepsilon \rightarrow 0$ deve ser uma função analítica em ε . É então conveniente definir

$$\beta(\lambda) = \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon = 0) = d_0$$

onde

$$\hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) = d_0 + d_1 \varepsilon + d_2 \varepsilon^2 + \dots$$

com coeficientes d_r a determinar. Posto isto, usamos o facto de λ_0 não depender da escala μ . Então

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu^\varepsilon Z_\lambda \lambda) \\
 &= \varepsilon \mu^\varepsilon Z_\lambda \lambda + \mu^\varepsilon \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) \lambda \frac{\partial Z_\lambda}{\partial \lambda} + \mu^\varepsilon Z_\lambda \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Então

$$\varepsilon \lambda Z_\lambda + \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) \left(Z_\lambda + \lambda \frac{\partial Z_\lambda}{\partial \lambda} \right) = 0$$

Usando as expressões de Z_λ e $\hat{\beta}$ obtemos

$$\varepsilon \lambda + a_1 \lambda + \lambda \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r+1}}{\varepsilon^r} + (d_0 + d_1 \varepsilon + d_2 \varepsilon^2 + \dots) \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^r} \left(a_r + \lambda \frac{da_r}{d\lambda} \right) \right] = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Então $d_r = 0$ para $r > 1$ e

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda + d_1) &+ \left[a_1 \lambda + d_0 + d_1 \left(a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \right) \right] + \sum_r \frac{1}{\varepsilon^r} \left[a_{r+1} \lambda + d_0 \left(a_r + \lambda \frac{da_r}{d\lambda} \right) \right. \\ &\left. + d_1 \left(a_{r+1} + \lambda \frac{da_{r+1}}{d\lambda} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

logo

$$\lambda + d_1 = 0$$

$$a_1 \lambda + d_0 + d_1 \left(a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \right) = 0$$

$$a_{r+1} \lambda + d_0 \left(a_r + \lambda \frac{da_r}{d\lambda} \right) + d_1 \left(a_{r+1} + \lambda \frac{da_{r+1}}{d\lambda} \right) = 0$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Estes cálculos dão

$$d_1 = -\lambda$$

$$\beta(\lambda) = d_0 = \lambda^2 \frac{da_1}{d\lambda}$$

$$\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}(a_{r+1}) = \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda}(\lambda a_r)$$

Portanto a função $\beta(\lambda)$ depende somente do coeficiente em $\frac{1}{\epsilon}$ de Z_λ que se calcula facilmente em teoria de perturbações. Além disso vemos que os resíduos dos pólos de ordem superior se podem calcular em termos do resíduo do pólo simples. Para $\lambda\phi^4$ é fácil de ver que

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Portanto

$$\beta(\lambda) = \lambda^2 \frac{da_1}{d\lambda} = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{3\lambda}{16\pi^2} \right) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}$$

como tínhamos obtido anteriormente. Para teorias de gauge há uma pequena modificação pois $g_0 = \mu^{\varepsilon/2} Z_g g$. Um cálculo trivial dá neste caso

$$d_1 = -g/2$$

e

$$\beta(g) = \frac{1}{2} g^2 \frac{da_1}{dg}$$

$$\frac{1}{2} g^2 \frac{da_{r+1}}{dg} = \beta(g) \frac{d}{dg} (g a_r)$$

onde, como anteriormente

$$Z_g = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(g) / \varepsilon^r .$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

ii) Cálculo de $\gamma_m(\lambda)$

Partimos de $m_0 = Z_m m$. Aplicando $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu \frac{\partial Z_m}{\partial \mu} m + Z_m \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \\
 &= \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) \frac{\partial Z_m}{\partial \lambda} m + m Z_m \mu \frac{\partial \ln m}{\partial \mu}
 \end{aligned}$$

Como $\mu \frac{\partial \ln m}{\partial \mu} = \gamma_m$, obtemos a equação

$$\left[\hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m \right] Z_m = 0$$

ou seja

$$\left(\gamma_m + d_1 \frac{db_1}{d\lambda} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_r} \left[d_0 \frac{db_r}{d\lambda} + \gamma_m b_r + d_1 \frac{db_{r+1}}{d\lambda} \right] = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Portanto

$$\gamma_m = -d_1 \frac{db_1}{d\lambda}$$

$$-d_1 \frac{db_{r+1}}{d\lambda} = \beta(\lambda) \frac{db_r}{d\lambda} + \gamma_m b_r$$

onde

$$d_1 = \begin{cases} -\lambda & \text{teoria } \lambda\phi^4 \\ -g/2 & \text{teorias de gauge} \end{cases}$$

Mais uma vez γ_m depende somente do resíduo do pólo simples.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

iii) Cálculo de $\gamma(\lambda)$

Aqui é mais fácil partir da definição de $\gamma(\lambda)$

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\phi = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_\phi \frac{1}{Z_\phi}$$

logo

$$\left[\hat{\beta}(\lambda, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2\gamma(\lambda) \right] Z_\phi = 0$$

o que dá

$$-2\gamma(\lambda) + d_1 \frac{dc_1}{d\lambda} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^r} \left[d_0 \frac{dc_r}{d\lambda} - 2\gamma c_r + d_1 \frac{dc_{r+1}}{d\lambda} \right] = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β . . .
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Então

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}d_1 \frac{dc_1}{d\lambda}$$

$$-d_1 \frac{dc_{r+1}}{d\lambda} = \beta(\lambda) \frac{dc_r}{d\lambda} - 2\gamma c_r$$

sendo o coeficiente d_1 dado anteriormente

Podemos concluir dizendo que o coeficiente do pólo simples nas constantes de renormalização, determina univocamente as funções β , γ_m e γ e também os valores dos pólos de ordem superior.

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- Gauge independence

- Nós adoptamos um esquema particular de renormalização. Se tivéssemos adoptado outro esquema teríamos outra definição dos parâmetros da teoria e funções β , γ_m e γ diferentes. Vamos aqui discutir os aspectos do grupo de renormalização que são independentes do esquema usado.
- Consideremos então dois esquemas (ambos independentes da massa). Então

$$g' = gF_g(g) \qquad F_g(g) = 1 + O(g^2)$$

$$Z'_m(g') = Z_m(g)F_m(g) \qquad F_m(g) = 1 + O(g^2)$$

$$Z'_\phi(g') = Z_\phi(g)F_\phi(g) \qquad F_\phi(g) = 1 + O(g')$$

- O 1 nas funções F expressa o facto que ao nível árvore não há ambiguidades. Usando as relações acima podemos ver como estão relacionadas as funções β , γ_m e γ em dois esquemas. Obtemos (estamos a considerar o caso duma teoria de gauge)

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

$$\beta'(g') = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g' = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (g F_g(g)) = \beta(g) \left(F_g + g \frac{\partial F_g}{\partial g} \right)$$

$$\gamma'_m(g') = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln m' = \mu \frac{\partial \ln}{\partial \mu} (F_m^{-1}(g) m) = \gamma_m(g) - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \ln F_m$$

$$\gamma'(g') = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z'_\phi(g') = \gamma(g) + \frac{1}{2} \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \ln F_\phi$$

□ As funções β , γ_m e γ só coincidirão se os esquemas forem o mesmo, isto é $F_g = F_m = F_\phi = 1$.

□ Contudo as propriedades seguintes são ainda independentes do esquema.

i) A existência de um zero de $\beta(g)$.

Se $\beta(g_0) = 0$ então $\beta'(g'_0) = 0$ para $g'_0 = g_0 F_g(g_0)$. Notar que em geral g_0 depende do esquema, isto é $g_0 \neq g'_0$.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- **ii) A primeira derivada de $\beta(g)$ no zero.**

Seja $\beta(g_0) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta'(g'_0)}{\partial g'} &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial g'} \frac{\partial}{\partial g} \left[\beta(g) \left(F_g + g \frac{\partial F_g}{\partial g} \right) \right] \right\}_{g_0} \\ &= \left[F_g + g \frac{\partial F_g}{\partial g} + g \frac{\partial \beta}{\partial g} + \beta(g) \frac{1}{F_g + g \frac{\partial F_g}{\partial g}} \frac{\partial \left(F_g + g \frac{\partial F_g}{\partial g} \right)}{\partial g} \right]_{g_0} \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial g}(g_0) . \end{aligned}$$

- **iii) Os primeiros dois termos em $\beta(g)$.**

Seja $\beta(g) = b_0 g^3 + b_1 g^5 + O(g^7)$, e

$$F_g(g) = 1 + ag^2 + O(g^4) .$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- **β & γ properties**
- Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Então

$$g' = g + ag^3 + O(g^5)$$

e

$$g = g' - ag'^3 + O(g^5)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \beta'(g') &= \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} (gF_g) = (b_0g^3 + b_1g^5 + O(g^7))(1 + 3ag^2 + O(g^4)) \\ &= b_0g^3 + (3ab_0 + b_1)g^5 + O(g^7) \\ &= b_0(g'^3 - 3ag'^5 + O(g'^7)) + (3ab_0 + b_1)(g'^5 + O(g'^7)) \\ &= b_0g'^3 + b_1g'^5 + O(g'^7) \end{aligned}$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- **β & γ properties**
- Gauge independence

- **iv) O primeiro termo em $\gamma(g)$ e $\gamma_m(g)$.**

Seja

$$\gamma(g) = cg^2 + O(g^4)$$

$$\gamma_m(g) = dg^2 + O(g^4)$$

Então como $\beta(g) = O(g^3)$ é evidente que

$$\gamma'(g') = cg'^2 + O(g'^4)$$

$$\gamma'_m(g') = dg'^2 + O(g'^4) .$$

- **v) O valor de $\gamma(g_0)$ e $\gamma_m(g_0)$ se $\beta(g_0) = 0$.**

Este resultado é imediato. Como veremos na secção seguinte todos estes resultados são necessários pois eles controlam resultados físicos e estes não podem depender do esquema de renormalização.

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate $\beta \dots$
- β & γ properties
- **Gauge independence**

A equação do grupo de renormalização em MS foi escrita para a teoria $\lambda\phi^4$. Vamos agora considerar teorias da gauge (abelianas ou não abelianas). Para a quantificação destas teorias é necessário introduzir um termo que fixe a gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2$$

onde escolhemos as gauges do tipo de Lorentz. Como não há correcções radiativas para a parte longitudinal do propagador, não é necessário nenhum contratermo para o termo que fixa a gauge. Portanto se pusermos, como habitualmente,

$$A^\mu = Z_A^{-1/2} A_0^\mu$$

obtemos

$$\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 = \frac{1}{2\xi Z_A}(\partial \cdot A_0)^2 = \frac{1}{2\xi_0}(\partial \cdot A_0)^2$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- **Gauge independence**

Isto quer dizer que o parâmetro de gauge é renormalização de acordo com

$$\xi_0 = Z_A \xi .$$

As funções de Green irreduzíveis renormalizadas, dependem em geral de ξ , isto é

$$\Gamma_R^{(n)}(g, m, \xi, \mu) = Z_A^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(g_0, m_0, \xi_0, \varepsilon)$$

A equação do grupo de renormalização é então

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g, \xi) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g, \xi) m \frac{\partial}{\partial m} + \delta(g, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} - \gamma_A(g, \xi) \right] \Gamma_R^{(n)}(g, m, \xi, \mu) = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- **Gauge independence**

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

onde

$$\begin{aligned} \delta(g, \xi) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \xi = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (Z_A^{-1} \xi_0) = \\ &= -\xi_0 \frac{1}{Z_A^2} \frac{\partial}{\partial \mu} Z_A \\ &= -2\xi \gamma_A(g, \xi) \end{aligned}$$

e se admitiu a possibilidade de β , γ_m e γ_A dependerem do parâmetro ξ . Contudo a dependência em ξ não é arbitrária, obedece a certos constrangimentos. Para vermos isso consideremos uma função de Green sem dimensões e correspondendo a operadores invariantes de gauge. Então

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} G_0(g_0, m_0, \xi_0, \varepsilon) = 0 \quad (\text{independente de gauge})$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- **Gauge independence**

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

e

$$G_0(g_0, m_0, \xi_0, \varepsilon) = G(g, m, \xi, \mu) \quad (\text{sem dimensões})$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G = 0$$

ou seja

$$\mathcal{D}_G G \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \xi} + \rho(g, \xi) \frac{\partial}{\partial g} + \sigma(g, \xi) m \frac{\partial}{\partial m} \right] G(g, m, \xi, \mu) = 0$$

onde

$$\rho(g, \xi) = \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad ; \quad \sigma(g, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln m$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- **Gauge independence**

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Mas G obedece à equação do grupo de renormalização

$$\mathcal{D}G \equiv \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} + \delta \frac{\partial}{\partial \xi} \right] G = 0$$

Usando a equação para $\mathcal{D}_G G = 0$ podemos substituir a derivada em ordem a ξ por derivadas em ordem aos outros parâmetros, obtendo uma equação do grupo de renormalização semelhante à das teorias que não têm campos de gauge, isto é

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial g} + \bar{\gamma}_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] G = 0$$

onde

$$\bar{\beta} \equiv \beta - \rho \delta \qquad \bar{\gamma}_m \equiv \gamma_m - \sigma \delta$$

Calculamos agora o comutador $[\mathcal{D}_G, \mathcal{D}]G = 0$. Obtemos

$$\left\{ \left[\frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial g} - \beta \frac{\partial \rho}{\partial g} - \delta \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] \frac{\partial}{\partial g} + \left[\frac{\partial \delta}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial \delta}{\partial g} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial \gamma_m}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial \gamma_m}{\partial g} - \beta \frac{\partial \sigma}{\partial g} - \delta \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right] m \frac{\partial}{\partial m} \right\} G = 0$$

Introduzindo as funções $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}_m$ e o operador

$$\bar{\mathcal{D}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial}{\partial g}$$

a equação anterior escreve-se

$$\left[(\bar{\mathcal{D}}\delta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\bar{\mathcal{D}} \bar{\beta} + \bar{\mathcal{D}}(\rho\delta) - \bar{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial g} - \delta \bar{\mathcal{D}}\rho \right) \frac{\partial}{\partial g} + \left(\bar{\mathcal{D}}\bar{\gamma}_m + \bar{\mathcal{D}}(\sigma\delta) - \bar{\beta} - \frac{\partial \sigma}{\partial g} - \delta \bar{\mathcal{D}}\sigma \right) m \frac{\partial}{\partial m} \right] G = 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties

• Gauge independence

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- **Gauge independence**

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

Multiplicando a equação $\mathcal{D}_G G = 0$ por $(\overline{\mathcal{D}}\delta)$ obtemos

$$\left[(\overline{\mathcal{D}}\delta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \rho(\overline{\mathcal{D}}\delta) \frac{\partial}{\partial g} + \sigma(\overline{\mathcal{D}}\delta) m \frac{\partial}{\partial m} \right] G = 0$$

Comparando as duas equações vemos que

$$\overline{\mathcal{D}} \overline{\beta} = \overline{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial g} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{D}} \overline{\gamma}_m = \overline{\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial g}$$

Estas equações asseguram que resultados físicos sejam independentes de gauge. Assim $\overline{\beta} = 0$ tem consequências físicas. Então $\overline{\mathcal{D}} \overline{\beta} = 0$ e $\overline{\mathcal{D}} \overline{\gamma}_m = 0$ dizendo que a existência dos zeros de $\overline{\beta}$ e a dimensão anómala da massa $\overline{\gamma}_m$ são independentes de gauge. Também se $\overline{\beta} = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial g} \right) &= \frac{\partial}{\partial g} \overline{\mathcal{D}} \overline{\beta} + \left[\overline{\mathcal{D}}, \frac{\partial}{\partial g} \right] \overline{\beta} \\ &= \frac{\partial}{\partial g} \overline{\mathcal{D}} \overline{\beta} - \frac{\partial \rho}{\partial g} \frac{\partial \overline{\beta}}{\partial g} = 0 \end{aligned}$$

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

e portanto a primeira derivada de $\bar{\beta}$ no zero é independente da gauge. Finalmente como $\rho = O(g^3)$ e $\delta = O(g^2)$ temos então

$$\bar{\beta} = \beta + O(g^5) .$$

Estes resultados não dependem de se ter adoptado subtracção mínima ou não. Se adoptarmos subtracção mínima temos então

Teorema

No esquema de subtracção mínima temos $\rho = \sigma = 0$ e portanto

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \bar{\beta} = \beta \quad \text{e} \quad \bar{\gamma}_m = \gamma_m$$

e β e γ_m são independentes da gauge em todas as ordens.

- RG Eq for MS
- Physical parameters
- Calculate β ...
- β & γ properties
- Gauge independence

Dem: Demonstramos só para ρ , para σ é igual.

$$\rho = g \frac{\partial}{\partial \xi} \ln g = -\frac{g}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial \xi}$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &= Z_g \rho + g \frac{\partial}{\partial \xi} \left(1 + \frac{a_1}{\varepsilon} + \frac{a_2}{\varepsilon^2} + \dots \right) \\ &= \rho + \frac{1}{\varepsilon} \left(\rho a_1 + g \frac{\partial a_1}{\partial \xi} \right) + O(1/\varepsilon^2) \end{aligned}$$

obtemos portanto

$$\rho = 0 .$$

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

Lecture 13

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

● Fixed points

● β functions

● QCD

● Paramagnetic

Applications

- Como vimos na secção anterior, o comportamento assintótico das funções de Green irreduzíveis depende do comportamento assintótico das soluções das equações para a constante de acoplamento efectiva $\bar{\lambda}(t)$ e para a massa efectiva, que como vimos são

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta(\bar{\lambda}) & ; & \bar{\lambda}(0) = \lambda \\ \frac{d\bar{m}}{dt} = [\gamma_m(\bar{\lambda}) - 1] \bar{m}(t) & ; & \bar{m}(0) = m \end{cases}$$

- Destas equações resulta que as variações da constante de acoplamento efectiva e da massa efectiva com uma variação de escala de energia são controladas pelas funções β e γ_m , respectivamente.
- Para estudar o comportamento assintótico de λ vamos admitir que $\beta(\lambda)$ tem a forma da figura seguinte

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

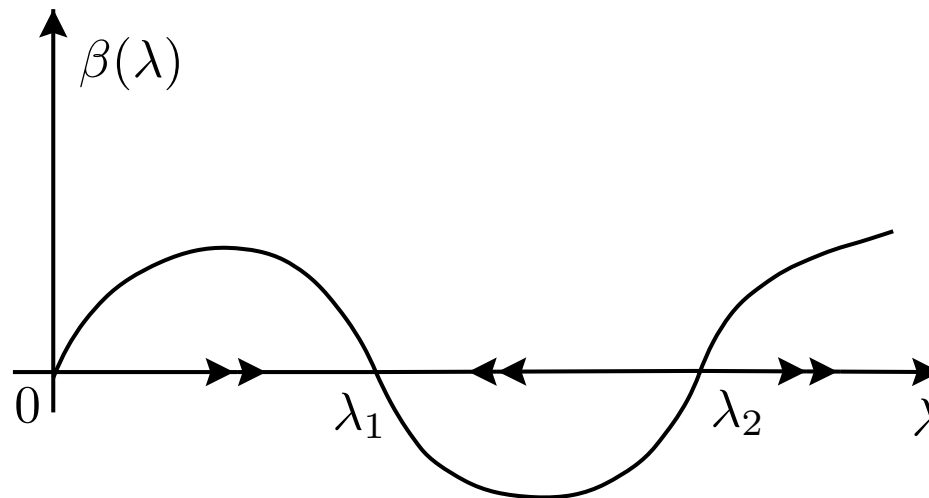
● Fixed points

● β functions

● QCD

● Paramagnetic

Applications



Os pontos, 0 , λ_1 e λ_2 onde $\beta(\lambda)$ se anula são chamadas *pontos fixos*, pois se $\bar{\lambda}$ se encontra num desses pontos em $t = 0$ então ficará aí para todos os valores do momento $\left(\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = 0\right)$. Os pontos fixos podem ser de dois tipos:

□ i) Ponto fixo estável ultravioleta(UV)

São aqueles em que $\beta'(\lambda) < 0$. É o caso do ponto λ_1 na figura. Neste caso $\beta(\lambda) > 0$ para $\lambda < \lambda_1$ e $\beta(\lambda) < 0$ para $\lambda > \lambda_1$. Então se para $t = 0$ $0 < \lambda < \lambda_1$ então quando $t \rightarrow \infty$ $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_1$. Por outro lado se $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ quando $t \rightarrow \infty$ também $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_1$. Portanto no intervalo $0 < \lambda < \lambda_2$ a constante de acoplamento é sempre conduzida para λ_1 quanto $t \rightarrow \infty$, isto é, para momentos grandes.

□ ii) Ponto fixo estável infravermelho(IR)

São aqueles em que $\beta'(\lambda) > 0$. É o caso dos pontos 0 e λ_2 da figura. É fácil de ver que quando $t \rightarrow \infty$ a constante de acoplamento se afasta de 0 e λ_2 , mas que no limite $t \rightarrow 0$ se aproxima deles.

Podemos agora estudar o comportamento assintótico das soluções do grupo de renormalização. Supomos, por exemplo $0 < \lambda < \lambda_2$. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1$$

A maneira como tende para λ_1 depende da primeira derivada de $\beta(\lambda)$.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

● **Fixed points**

● β functions

● QCD

● Paramagnetic

[Applications](#)

Suponhamos que na vizinhança de λ_1 temos

$$\beta(\lambda) = a(\lambda_1 - \lambda) \quad ; \quad a > 0$$

$$\beta'(\lambda_1) = -a < 0$$

Então

$$\bar{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)e^{-at}$$

isto é, a aproximação do ponto fixo é exponencial na variável t . Será tanto maior quanto maior for $|\beta'(\lambda_1)| = a$. Vimos anteriormente que a solução da equação da massa efectiva era

$$\bar{m}(t) = m e^{-t} e^{\int_0^t \gamma_m(\bar{\lambda}) dt'}$$

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda} = \lambda_1$ então temos para $t \rightarrow \infty$

$$\bar{m} = m e^{-t(1-\gamma_m(\lambda_1))}$$

o que mostra que se $\gamma_m(\lambda_1) < 1$ então $m(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Na mesma aproximação

$$\int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \simeq \gamma(\lambda_1)t$$

e portanto a solução assintótica é

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Gamma^n(\sigma p_i, m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n[1+\gamma(\lambda_1)]} \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{m}, \lambda_1, \mu)$$

o que mostra que a dimensão dos campos não é 1 mas $1 + \gamma(\lambda_1)$. Daí o nome de dimensão anómala para $\gamma(\lambda)$.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

• **Fixed points**

• β functions

• QCD

• Paramagnetic

[Applications](#)

- ❑ Em geral é difícil calcular os zeros da função β , pois requiere normalmente resultados para além da teoria de perturbações.
- ❑ Contudo $\beta(\lambda)$, $\gamma_m(\lambda)$ e $\gamma(\lambda)$ têm um zero trivial na origem. Se acontecer que a origem seja um ponto fixo estável UV então quer dizer que quando a escala da energia aumenta a constante de acoplamento diminui. No limite $t \rightarrow \infty$, $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ e por isso se diz destas teorias que são *assimptoticamente livres*. É fácil de ver que isso acontece se $\beta'(0) < 0$.
- ❑ Na secção seguinte vamos ver quais as teorias em que isso pode acontecer.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

• Fixed points

• β functions

• QCD

• Paramagnetic

Applications

Vamos nesta secção mostrar que só as teorias de gauge não abelianas podem ser assintoticamente livres, isto é, só estas verificam a propriedade $\beta'(0) < 0$.

i) Teorias com escalares

Já vimos anteriormente que para a teoria escalar mais simples, $\lambda\phi^4$, temos

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^4)$$

e portanto não é assintoticamente livre. Consideramos agora a teoria escalar mais geral com campos ϕ_i e acoplamento

$$\mathcal{L}_I = -\lambda_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l$$

onde se somam os índices repetidos. Então

$$\beta_{ijkl} = \frac{d\bar{\lambda}_{ijkl}(t)}{dt} = A(\bar{\lambda}_{ilmn}\bar{\lambda}_{kjmn} + \bar{\lambda}_{ijmn}\bar{\lambda}_{klmn} + \bar{\lambda}_{ikmn}\bar{\lambda}_{jlmn})$$

com $A > 0$. A teoria não é assintoticamente livre pois há sempre funções β com derivadas positivas. Por exemplo

$$\frac{d\bar{\lambda}_{1111}}{dt} = \beta_{1111} = 3A|\bar{\lambda}_{11mn}|^2 > 0 \quad ; \quad \forall t$$

ii) Teorias com escalares + fermiões + acoplamentos de Yukawa

O termo da interacção mais geral para uma teoria com escalares e fermiões é

$$\mathcal{L}_I = - \sum_{i,j,k,\ell} \lambda_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell + \sum_{a,b,k} \bar{\psi}^a (A_{ab}^k + iB_{ab}^k \gamma_5) \bar{\psi}^b \phi_k$$

onde A e B são matrizes reais. Agora já não é possível mostrar que $\frac{d\bar{\lambda}_{iiii}}{dt} > 0$ por causa do loop de fermiões de ordem A^2 ou B^2 com um sinal negativo. Se definirmos $(g^i)_{ab} \equiv A_{ab}^i + iB_{ab}^i$, obtemos

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{dg^i}{dt} &= (\text{Tr} g^i g^{j\dagger}) g^j + \text{Tr}(g^{i\dagger} g^j) g^j + M^{ij} g^j \\ &\quad + \frac{1}{2} g^i g^{\dagger j} g^j + \frac{1}{2} g^j g^{\dagger j} g^i + 2g^j g^{\dagger i} g^j \end{aligned}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points

- β functions

- QCD

- Paramagnetic

Applications

onde $M^{ij} \equiv \frac{1}{4} \lambda_{iklm} \lambda_{jklm}$. Usando este resultado é possível demonstrar o teorema seguinte:

Teorema

A teoria mais geral com escalares e fermiões não é assintoticamente livre pois $\frac{d}{dt} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^i) > 0$ e portanto não é possível $g_i \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Dem:

$$\begin{aligned}
 8\pi^2 \frac{d}{dt} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^i) &= 8\pi^2 \frac{d}{dt} \sum_{a,b,i} |g_{ab}^i|^2 \\
 &= \text{Tr}(g^i g^{j\dagger}) \text{Tr}(g^{i\dagger} g^j) + \text{Tr}(g^i g^{j\dagger}) (\text{Tr} g^i g^{j\dagger}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}(g^i g^{i\dagger} g^j g^{j\dagger}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^i g^{j\dagger} g^j) \\
 &\quad + 2\text{Tr}(g^i g^{j\dagger} g^i g^{j\dagger}) + M^{ij} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^j)
 \end{aligned}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

• Fixed points

• β functions

• QCD

• Paramagnetic

Applications

Agora o último termo é positivo, assim como o terceiro e o quarto. O primeiro é maior que o segundo e portanto

$$8\pi^2 \frac{d}{dt} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^i) \geq 2 \left[\text{Tr}(g^i g^{j\dagger}) \text{Tr}(g^i g^{j\dagger}) + \text{Tr}(g^i g^{j\dagger} g^i g^{j\dagger}) \right]$$

e o segundo membro é positivo pois pode ser escrito

$$8\pi^2 \frac{d}{dt} \text{Tr}(g^{i\dagger} g^i) \geq (g_{ab}^i g_{cd}^i + g_{ad}^i g_{cb}^i) (g_{ba}^{j\dagger} g_{dc}^{j\dagger} + g_{da}^{j\dagger} g_{bc}^{j\dagger}) \geq 0$$

como queríamos demonstrar.

iii) Teorias gauge abelianas

Consideremos o caso de QED. Temos

$$Z_e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_3^{-1/2}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

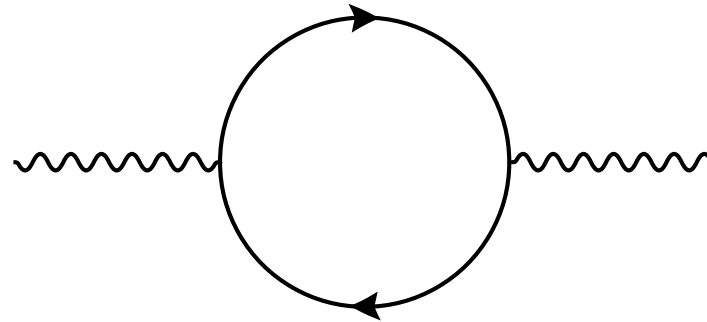
Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points
- β functions
- QCD
- Paramagnetic

Applications

Z_3 pode ser calculado do diagrama de polarização do vácuo representado na figura



e o resultado é

$$Z_3^{-1/2} = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots$$

logo

$$\beta(e) = \frac{1}{2} e^2 \frac{da_1}{de} = \frac{e^3}{12\pi^2} > 0$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points

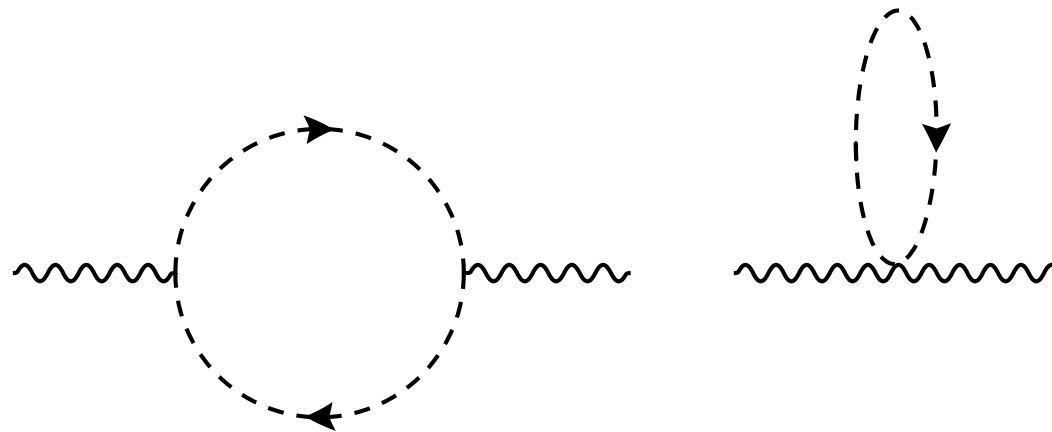
- β functions

- QCD

- Paramagnetic

Applications

Se tivéssemos electrodinâmica escalar Z_3 seria obtido a partir dos diagramas da figura



e o resultado seria

$$Z_3^{-1/2} = 1 + \frac{e^2}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$$

o que dá neste caso $\beta(e) = \frac{e^3}{48\pi^2} > 0$. Portanto as teorias de gauge abelianas não são livres assintoticamente.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points

- β functions

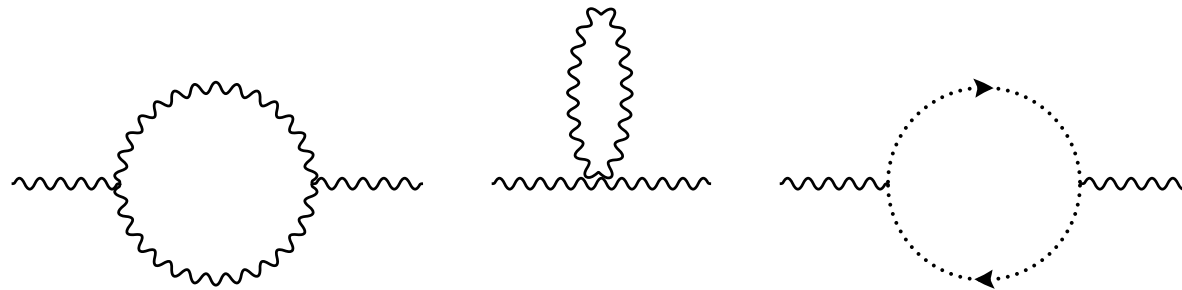
- QCD

- Paramagnetic

Applications

iv) Teorias de gauge não abelianas

Comecemos pela teoria de gauge pura. A renormalização da função de onda para os campos de gauge é obtida a partir dos diagramas da figura.



Em subtracção mínima obtemos

$$Z_A = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{13}{3} - \xi \right) C_2(V) \frac{1}{\epsilon}$$

onde $C_2(V)$ é o operador de Casimir definido no capítulo 2 para a representação adjunta, a que pertencem os campos da gauge (vectores).

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points

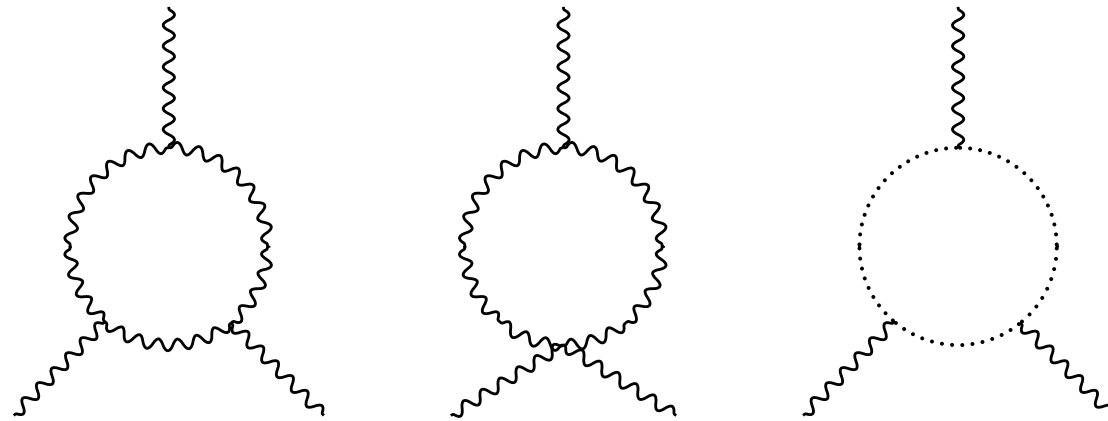
- β functions

- QCD

- Paramagnetic

Applications

A constante de renormalização do vértice triplo, Z_1 , é obtida a partir dos diagramas da figura



Obtemos

$$Z_1 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{17}{6} - \frac{3\xi}{2} \right) C_2(V) \frac{1}{\epsilon} + \dots$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

• Fixed points

• β functions

• QCD

• Paramagnetic

Applications

Então

$$Z_g \equiv Z_1 Z_A^{-3/2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C_2(V) \right) \frac{1}{\varepsilon} + \dots$$

Usando Z_A e Z_g e as definições de β e γ obtemos

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2} \frac{11}{3} C_2(V) < 0$$

e

$$\gamma_A = -\frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left(\frac{13}{3} - \xi \right) C_2(V)$$

Portanto as teorias de gauge não abelianas sem campos de matéria são assintoticamente livres. Notar que a dependência da gauge (em ξ) desapareceu de β de acordo com o resultado demonstrado anteriormente.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points
- β functions
- QCD
- Paramagnetic

Applications

A inclusão de fermiões e escalares acoplados mínimamente é agora trivial. O lagrangeano de interacção é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & g \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j T_{Fij}^a A_\mu^a \\ & + ig \phi_i^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi_j T_{Sij}^a A^{\mu a} \\ & + g^2 \phi_i^* T_{Sij}^a T_{Sjk}^b \phi_k A_\mu^a A^{\mu b} \end{aligned}$$

onde T_F^a e T_S^a são os geradores na representação em que se encontram os fermiões e os escalares respectivamente. Para se encontrar a contribuição destas partículas para a função β temos que calcular a contribuição delas para Z_g . O mais fácil é usar os resultados de QED e electrodinâmica escalar que dizem que

$$Z_g = Z_A^{-1/2}$$

e calcular a contribuição para Z_A dos fermiões e escalares devido aos diagramas

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

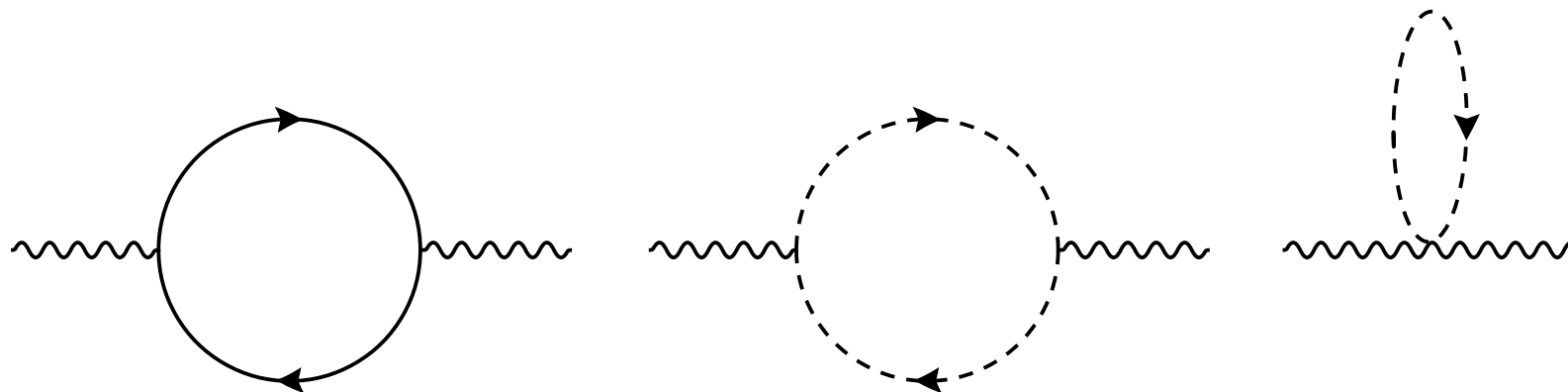
- Fixed points

- β functions

- QCD

- Paramagnetic

Applications



O resultado é

$$Z_g(\text{fermiões} + \text{escalares}) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{4}{3}T(R_F) + \frac{1}{3}T(R_S) \right] \frac{1}{\varepsilon} + \dots$$

pelo que

$$\beta(\text{fermiões}) = \frac{g^3}{16\pi^2} \frac{4}{3}T(R_F)$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

• Fixed points

• β functions

• QCD

• Paramagnetic

Applications

e

$$\beta(\text{escalares}) = \frac{g^3}{16\pi^2} \frac{1}{3} T(R_S)$$

Pondo tudo junto obtemos

$$\beta = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C_2(V) + \frac{4}{3} T(R_F) + \frac{1}{3} T(R_S) \right]$$

onde as quantidades $T(R)$ são definidas para uma dada representação por

$$\text{Tr}(T^a T^b) = T(R) \delta^{ab}$$

Se a teoria contém fermiões de Majorana (ou spinores de Weyl) ou campos escalares reais, os coeficientes em frente de $T(R_F)$ e $T(R_S)$ são multiplicados por um factor adicional de 1/2.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

• Fixed points

• β functions

• **QCD**

• Paramagnetic

[Applications](#)

Consideremos agora um exemplo simples, QCD ($SU(3)$) com as três famílias de quarks.

Para $SU(N)$ temos

$$C_2(V) = N$$

e como os quarks se encontram na representação fundamental

$$T(R_F) = \frac{1}{2}$$

Então

$$\beta = \frac{g}{16\pi^2} \left[-\frac{33}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \times 2N_g \right]$$

ou seja ($N_g =$ número de gerações ou famílias)

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

• Fixed points

• β functions

• **QCD**

• Paramagnetic

[Applications](#)

$$\beta = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{33 - 4N_g}{3} \right]$$

Portanto $SU(3)$ será assintoticamente livre se

$$33 - 4N_g > 0$$

ou ainda

$$N_g < \frac{33}{4} \rightarrow N_g \leq 8$$

São portanto permitidas 8 famílias ou seja 16 tripletos de $SU(3)$.

- [Lecture 12](#)
- [Renormalization](#)
- [Minimal subtraction](#)
- [Lecture 13](#)
- [Eff gauge couplings](#)
 - Fixed points
 - β functions
 - QCD
 - **Paramagnetic**
- [Applications](#)

Um argumento recente (Nielsen 1981, Hughs 1981) permite compreender melhor o que se passa de diferente nas teorias de gauge não abelianas para que elas tenham liberdade assintótica. Primeiro o facto de a carga diminuir a curta distância pode ser interpretado como um *anti - shielding* do vácuo, isto é

$$\varepsilon < 1$$

O problema em compreender o que se passa resulta do facto de não conhecermos substância com $\varepsilon < 1$ (Em QED a carga aumenta a curta distância e portanto o vácuo é um dieléctrico normal $\varepsilon > 1$). Contudo o vácuo deve ser invariante relativista e portanto deve ter uma permeabilidade μ tal que (estamos a fazer $c = 1$)

$$\mu\varepsilon = 1$$

Assim o *antiscreening* corresponde a $\mu > 1$. Portanto o vácuo duma teoria de gauge não abeliana é um *paramagnético* e este conceito pode ser compreendido mais facilmente.

- [Lecture 12](#)
- [Renormalization](#)
- [Minimal subtraction](#)
- [Lecture 13](#)
- [Eff gauge couplings](#)
 - Fixed points
 - β functions
 - QCD
 - **Paramagnetic**
- [Applications](#)

A permeabilidade magnética pode ser calculada calculando a densidade de energia do vácuo num campo exterior

$$u_0 = \frac{1}{2\mu} B_{ext}^2$$

Nielsen e Hughes mostraram que $\mu = 1 + \chi$ onde a susceptibilidade χ é dada por

$$\chi \sim (-1)^{2s} q^2 \sum_{s_3} \left(-\frac{1}{3} + \gamma^2 s_3^2 \right)$$

onde s é o spin, q a carga, γ a razão giromagnética e s_3 a projecção de spin na direcção do campo magnético externo. Assim para escalares, fermiões e campos de gauge obtemos

Escalares

$$\chi_S \sim -\frac{1}{3} q_S^2 < 0 \quad (\text{diamagnético})$$

- Fixed points
- β functions
- QCD
- **Paramagnetic**

Fermiões ($\gamma_F = 2$)

$$\chi_F \sim (-1)q_F^2 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{3}q_F^2 \quad (\text{diamagnético})$$

Bosões de gauge ($\gamma_V = 2$)

$$\chi_V \sim q_V^2 2 \left(-\frac{1}{3} + 4 \right) = \frac{22}{3}q_V^2 \quad (\text{paramagnético})$$

e portanto

$$\chi_{\text{Total}} \sim \frac{22}{3}q_V^2 - \frac{4}{3}q_F^2 - \frac{1}{3}q_S^2$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

- Fixed points
- β functions
- QCD
- **Paramagnetic**

Applications

Comparando com a função β podemos fazer a correspondência

$$q_V^2 \rightarrow \frac{1}{2} C_2(V)$$

$$q_F^2 \rightarrow T(R_F)$$

$$q_S^2 \rightarrow T(R_S)$$

o que permite compreender o vácuo das teorias de gauge não abelianas como um meio paramagnético.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

We consider the Grand Unified Theory (GUT) with the gauge group $SU(5)$, that is

$$SU(5) \supset SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) .$$

The unification takes place at the GUT scale M_X . Using the renormalization group equations and the low energy data on the coupling constants, it is possible to determine the scale M_X as well as other predictions for the theory at the low scale, which we take to be the scale M_Z . For this we need to know how the different coupling constants evolve with the scale.

We start by writing the covariant derivatives for the unified theory and for the theory with the broken symmetry.

$$SU(5) : D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}$$

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) : D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \sum_{\alpha}^8 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \\ + ig_2 \sum_{\alpha}^3 A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$$

At the scale M_X where the unification takes place we have

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1$$

where g_1 is the coupling constant of the abelian subgroup of $SU(5)$. However for the abelian groups there are no constraints in the normalization of the generators, and therefore the the generator λ^0 of that $U(1)$ can be normalized in a different way from the hypercharge.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

• **Scale M_X**

• Scale M_Z

• Standard Model

• MSSM

We must have

$$g_1 \lambda^0 = g' Y$$

As λ^0 is a generator of $SU(5)$ it is normalized according to

$$T_F(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$$

that is, for the fundamental representation we must have

$$\lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

Now, for the fundamental representation, we have

$$5 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^+ \\ \nu_e^c \end{pmatrix}_R$$

and the hypercharge (remember that $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$) can be read directly. We obtain,

$$Y = \begin{bmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

Therefore $Y = -\sqrt{\frac{5}{3}}\lambda^0$ and $g' = -\sqrt{\frac{3}{5}}g_1$. This allows to determine $\sin^2 \theta_W$ at the GUT scale M_X ,

$$\sin^2 \theta_W(M_X) = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3}{5}g_1}{g_2 + \frac{3}{5}g_1} = \frac{3}{8}$$

Also, for future reference, we note that

$$g'^2 = \frac{3}{5} g_1^2 .$$

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

- Scale M_X
- **Scale M_Z**
- Standard Model
- MSSM

Let us look now at what happens at the scale M_Z . The evolution of the coupling constants is governed by the RGE equations for the three gauge groups in the broken phase

$$\frac{dg_i}{dt} = \beta_i$$

These β functions are given by

$$\beta_i = \frac{g_i^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3}C_2(V) + \sum_j \frac{4}{3}T(R_{F_j}) + \sum_k \frac{1}{3}T(R_{S_k}) \right]$$

where the sums are over all the fermion and scalar physical states of the theory at a given scale. Given the form of the last equation it is usual to define

$$\beta_i \equiv \frac{1}{16\pi^2} b_i g_i^3$$

and therefore the b_i are defined by the bracket of the equation above.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

• [Scale \$M_X\$](#)

• [Scale \$M_Z\$](#)

• [Standard Model](#)

• [MSSM](#)

We get

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{b_i}{16\pi^2} g_i^3$$

Let us solve this equations before we evaluate the beta function coefficients b_i . For that it is usual to introduce the generalization of the fine structure constant, that is, we define

$$\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}$$

Multiplying both sides by g_i and doing some trivial algebra we get,

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{b_i}{2\pi} \alpha_i^2$$

Rearranging and integrating between some initial (μ_i), and final scale (μ_f), we get

$$\int_i^f \frac{d\alpha_i}{\alpha_i^2} = \frac{b_i}{2\pi} \int_i^f dt$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

• Scale M_X

• Scale M_Z

• Standard Model

• MSSM

or (remember that $t = \ln(\mu)$)

$$\left[-\frac{1}{\alpha_i} \right]_i^f = \frac{b_i}{2\pi} (t_f - t_i) = \frac{b_i}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_f}{\mu_i} \right)$$

and finally

$$\alpha_i^{-1}(\mu_f) = \alpha_i^{-1}(\mu_i) - \frac{b_i}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu_f^2}{\mu_i^2} \right)$$

As at the unification scale M_X we have, by definition that

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5$$

where α_5 is the $SU(5)$ unified value, and we can write the final solution

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + \frac{b_i}{4\pi} \ln \left(\frac{M_X^2}{\mu^2} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

We can rewrite these equations in terms of electromagnetic fine structure constant $\alpha(\mu)$ and of the strong coupling equivalent $\alpha_s(\mu)$, that are measured at the weak scale, to obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + \frac{b_3}{4\pi} \ln \left(\frac{M_X^2}{\mu^2} \right) \\ \alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W(\mu) = \alpha_5^{-1} + \frac{b_2}{4\pi} \ln \left(\frac{M_X^2}{\mu^2} \right) \\ \frac{3}{5} \cos^2 \theta_W(\mu) \alpha^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + \frac{b_1}{4\pi} \ln \left(\frac{M_X^2}{\mu^2} \right) \end{array} \right.$$

From these equations we obtain,

$$\ln \frac{M_X^2}{\mu^2} = \frac{12\pi}{-8b_3 + 3b_2 + 5b_1} \left[\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha_s(\mu)} \right]$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

• Scale M_X

• Scale M_Z

• Standard Model

• MSSM

That allows to determine M_X , once $\alpha(\mu)$ and $\alpha_s(\mu)$ are known, at a given scale μ , and

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{3(b_2 - b_3)}{5b_1 + 3b_2 - 8b_3} + \frac{5(b_1 - b_2)}{5b_1 + 3b_2 - 8b_3} \frac{\alpha(\mu)}{\alpha_S(\mu)}$$

which allows to determine $\sin^2 \theta_W$ at the scale $\mu = M_Z$, once $\alpha(M_Z)$ and $\alpha_s(M_Z)$ are known. Finally we can also solve for the value of α_5^{-1} . We get

$$\alpha_5^{-1} = \alpha^{-1}(\mu) \frac{1}{5b_1 + 3b_2 - 8b_3} \left[-3b_3 + (5b_1 + 3b_2) \frac{\alpha(\mu)}{\alpha_S(\mu)} \right]$$

Now we turn to the evaluation of the coefficients b_i first in the Standard Model (SM) and then in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM).

In the SM we have the gauge fields, $N_g = 3$ families of leptons, $N_F = 2N_g = 6$ quark flavours and one Higgs. With this information we can find the coefficients b_i for the SM using the definition

$$b_i = -\frac{11}{3}C_2(V_i) + \sum_j \frac{2}{3}T(R_{F_j}) + \sum_k \frac{1}{3}T(R_{S_k})$$

where we have separated the sum in the fermions for each quirkality. This is important for the SM as the model is described in terms of left and right-handed fermions.

- $SU(3)$

For $SU(3)$, we have $C_2(V_3) = 3$ and the quarks are in the fundamental representation, therefore $T(R_{F_j}) = 1/2$. Then the counting goes as follows,

$$b_3 = \underbrace{-\frac{11}{3} \times 3}_{\text{Gauge}} + N_g \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times (2 + 1 + 1)}_{\text{quarks}} \right] = -7$$

where the meaning of $(2 + 1 + 1)$ is that we count the up and down components of each $(SU(2)_L)$ doublet and then the corresponding right-handed quarks for each generation.

- $SU(2)$

For the $SU(2)$ we get

$$b_2 = \underbrace{-\frac{11}{3} \times 2}_{\text{Gauge}} + N_g \times \left(\underbrace{N_c \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{quarks}_L} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{leptons}} \right) + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Higgs}} = -\frac{19}{6}$$

where $N_c = 3$ is the number of colours.

- $U(1)$

Finally for the $U(1)$ part, with the correct normalization, we have

$$b_1 = \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{3} \times \sum_{f_L, f_R} \left(\frac{Y}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \times \sum_{\text{scalars}} \left(\frac{Y}{2} \right)^2 \right]$$

and therefore,

$$\begin{aligned}
 b_1 = \frac{3}{5} \times & \left[N_g \times \left(\underbrace{\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \times 2}_{\text{Leptons}_L} + \underbrace{\frac{2}{3} \times (-1)^2}_{\text{Leptons}_R} + N_c \times \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times 2}_{\text{Quarks}_L} \right. \right. \\
 & \left. \left. + N_c \times \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} \right)^2}_{\text{Up-Quarks}_R} + N_c \times \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2}_{\text{Down-Quarks}_R} \right) + \underbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 2}_{\text{Higgs}} \right] \\
 = 4 + & \underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{Higgs}} = \frac{41}{10}
 \end{aligned}$$

- [Lecture 12](#)
- [Renormalization](#)
- [Minimal subtraction](#)
- [Lecture 13](#)
- [Eff gauge couplings](#)
- [Applications](#)
 - Scale M_X
 - Scale M_Z
 - **Standard Model**
 - MSSM

- So, in summary we have for the SM,

$$b_1 = \frac{41}{10}, \quad b_2 = -\frac{19}{6}, \quad b_3 = -7$$

- Now let us look to see what are the results for M_X , $\sin^2 \theta_W(M_Z)$ and α_5^{-1} . We will use the current values from the Particle Data Group. These are

$$\alpha^{-1}(M_Z) = 127.916, \quad \alpha_s(M_Z) = 0.118, \quad M_Z = 91.1896 \text{ GeV}$$

we get

$$M_X = 6.7 \times 10^{14} \text{ GeV}, \quad \sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.208, \quad \alpha_5^{-1} = 41.48$$

- At the time that this GUT model was proposed it was completely consistent. However after many years of dedicated experiments for find the decay of the proton, the lower limit was substantially improved and also after LEP the coupling constants are known with greater precision.
- Today the value for M_X is too low, the same being true for the value of $\sin^2 \theta_W(M_Z)$ (the best value today is around $\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.230$).

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

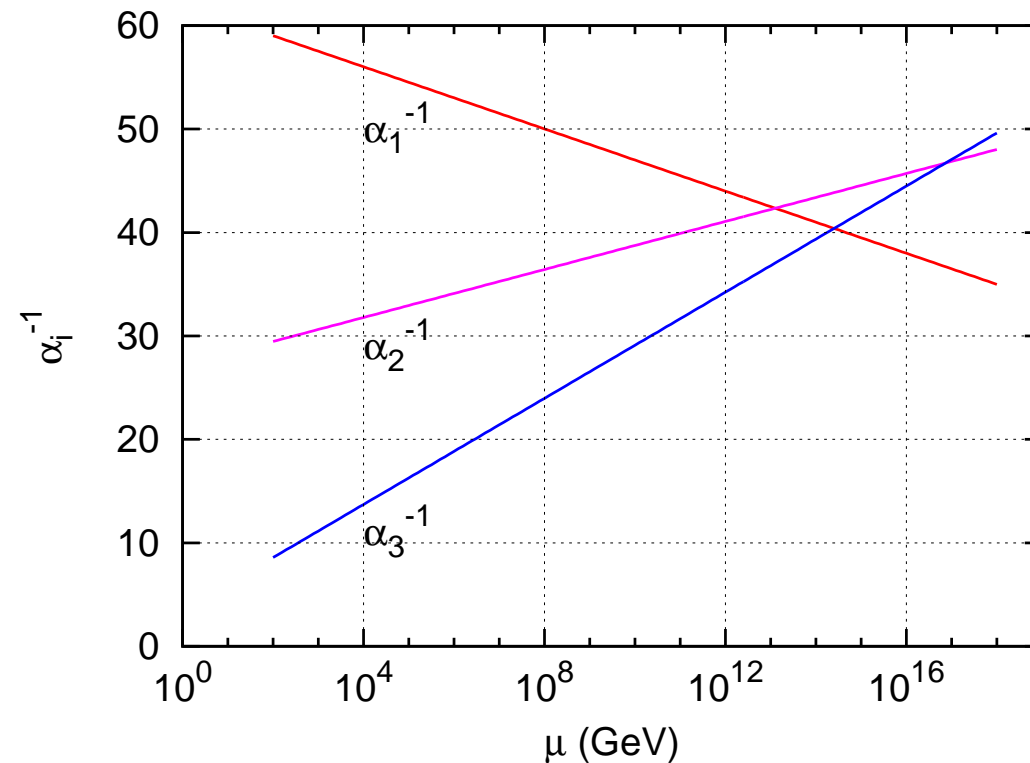
• Scale M_X

• Scale M_Z

• **Standard Model**

• MSSM

This can be seen very clearly if we plot the α_i^{-1} as a function of $\ln(\mu^2/M_Z^2)$. This is shown in the figure



We clearly see that the agreement is quite poor with today's values.

Minimal Supersymmetric Standard Model

Let us now turn to the MSSM. Below the GUT scale the gauge group is the same as in the SM, but the particle content is larger, more than duplicated in relation to the SM. We summarize in the following the particle content and their quantum numbers under $G = SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$.

Supermultiplet	$SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ Quantum Numbers
$\widehat{V}_1 \equiv (\lambda', W_1^\mu)$	(1, 1, 1)
$\widehat{V}_2 \equiv (\lambda^a, W_2^{\mu a})$	(1, 3, 0)
$V_3 \equiv (\tilde{g}^b, W_3^{\mu b})$	(8, 1, 0)
$\widehat{L}_i \equiv (\tilde{L}, L)_i$	(1, 2, -1)
$\widehat{R}_i \equiv (\tilde{\ell}_R, \ell_L^c)_i$	(1, 1, 2)
$\widehat{Q}_i \equiv (\tilde{Q}, Q)_i$	(3, 2, $\frac{1}{3}$)
$\widehat{D}_i \equiv (\tilde{d}_R, d_L^c)_i$	(3, 1, $\frac{2}{3}$)
$\widehat{U}_i \equiv (\tilde{u}_R, u_L^c)_i$	(3, 1, $-\frac{4}{3}$)
$\widehat{H}_d \equiv (H_d, \tilde{H}_d)$	(1, 2, -1)
$\widehat{H}_u \equiv (H_u, \tilde{H}_u)$	(1, 2, 1)

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- **MSSM**

With the values in the previous table we can calculate the contribution of the various particles to the b_i coefficients.

- $SU(3)$

- **Gauge Supermultiplet**

The gauge multiplet has a gauge boson contributing with

$$b^{\text{gauge boson}} = -\frac{11}{3} C_2(V)$$

and the left-handed gauginos in the adjoint representation

$$b^{\text{gauginos}} = \frac{2}{3} C_2(V)$$

and therefore

$$b^{\text{gauge SM}} = -3 C_2(V)$$

where SM stands here for *super-multiplet*. Applying now to $SU(3)$ we get

$$b_3^{\text{gauge SM}} = -9$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

□ Left-handed Lepton Supermultiplet

$$b_3^{\text{Leptons}_L \text{ SM}} = 0$$

□ Right-handed Lepton Supermultiplet

$$b_3^{\text{Leptons}_R \text{ SM}} = 0$$

□ Left-handed Quark Supermultiplet

$$b_3^{\text{Quarks}_L \text{ SM}} = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2}_{\text{Quarks}_L} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2}_{\text{Squarks}_L} = 1$$

□ Right-handed Up-Quark Supermultiplet

$$b_3^{\text{Up-Quark}_R \text{ SM}} = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Up-Quarks}_R} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Up-Squarks}_R} = \frac{1}{2}$$

- [Lecture 12](#)
- [Renormalization](#)
- [Minimal subtraction](#)
- [Lecture 13](#)
- [Eff gauge couplings](#)
- [Applications](#)
 - Scale M_X
 - Scale M_Z
 - Standard Model
 - MSSM

□ Right-handed Down-Quark Supermultiplet

$$b_3^{\text{Down-Quark}_R \text{ SM}} = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Down-Quarks}_R} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Down-Squarks}_R} = \frac{1}{2}$$

□ Up type Higgs Supermultiplet

$$b_3^{\text{Up-Higgs SM}} = 0$$

□ Down type Higgs Supermultiplet

$$b_3^{\text{Down-Higgs SM}} = 0$$

- $SU(2)$

- **Gauge Supermultiplet**

$$b_2^{\text{gauge SM}} = -6$$

- **Left-handed Lepton Supermultiplet**

$$b_2^{\text{Leptons}_L \text{ SM}} = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Leptons}_L} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Sleptons}_L} = \frac{1}{2}$$

- **Right-handed Lepton Supermultiplet**

$$b_2^{\text{Leptons}_R \text{ SM}} = 0$$

- **Left-handed Quark Supermultiplet**

$$b_2^{\text{Quarks}_L \text{ SM}} = N_c \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Quarks}_L} + N_c \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Squarks}_L} = N_c \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

□ Right-handed Up-Quark Supermultiplet

$$b_2^{\text{Up-Quark}_R \text{ SM}} = 0$$

□ Right-handed Down-Quark Supermultiplet

$$b_2^{\text{Down-Quark}_R \text{ SM}} = 0$$

□ Up type Higgs Supermultiplet

$$b_2^{\text{Up-Higgs SM}} = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Higgs}_u} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Higgsino}_u} = \frac{1}{2}$$

□ Down type Higgs Supermultiplet

$$b_2^{\text{Down-Higgs SM}} = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Higgs}_d} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Higgsino}_d} = \frac{1}{2}$$

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

• $U(1)$

□ **Gauge Supermultiplet**

$$b_1^{\text{gauge SM}} = 0$$

□ **Left-handed Lepton Supermultiplet**

$$b_1^{\text{Leptons}_L \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Leptons}_L} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Sleptons}_L} \right] = \frac{3}{10}$$

□ **Right-handed Lepton Supermultiplet**

$$b_1^{\text{Leptons}_R \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times (-1)^2}_{\text{Leptons}_R} + \underbrace{\frac{1}{3} \times (-1)^2}_{\text{Sleptons}_R} \right] = \frac{3}{5}$$

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

□ Left-handed Quark Supermultiplet

$$b_1^{\text{Quarks}_L \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times N_c \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2}_{\text{Quarks}_L} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2}_{\text{Squarks}_L} \right] = N_c \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{10}$$

□ Right-handed Up-Quark Supermultiplet

$$b_1^{\text{Up-Quarks}_R \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times N_c \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{Up-Quarks}_R} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{Up-Squarks}_R} \right] = N_c \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{5}$$

□ Right-handed Down-Quark Supermultiplet

$$b_1^{\text{Down-Quarks}_R \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times N_c \times \left[\underbrace{\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2}_{\text{Down-Quarks}_R} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2}_{\text{Down-Squarks}_R} \right] = N_c \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}$$

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

□ Up type Higgs Supermultiplet

$$b_1^{\text{Higgs}_u \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times \left[\underbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Higgs}_u} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Higgs}_u} \right] = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

□ Down type Higgs Supermultiplet

$$b_1^{\text{Higgs}_d \text{ SM}} = \frac{3}{5} \times \left[\underbrace{\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Higgs}_d} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}_{\text{Higgs}_d} \right] = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

Now we put everything together to obtain for the MSSM,

$$\begin{aligned}
 b_1 &= N_g \times \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \right) + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 3 \times 2 + \frac{3}{5} = \frac{33}{5} \\
 b_2 &= -6 + N_g \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
 b_3 &= -9 + N_g \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = -3
 \end{aligned} \tag{1}$$

Now let us look to see what are the results for M_X , $\sin^2 \theta_W(M_Z)$ and α_5^{-1} in the MSSM. Using the same inputs as for the SM, we get

$$M_X = 2.1 \times 10^{16} \text{ GeV}, \quad \sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.231, \quad \alpha_5^{-1} = 24.27$$

we immediately see that these values are quite good. This can be seen very clearly if we plot the α_i^{-1} as a function of $\ln(\mu^2/M_Z^2)$.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

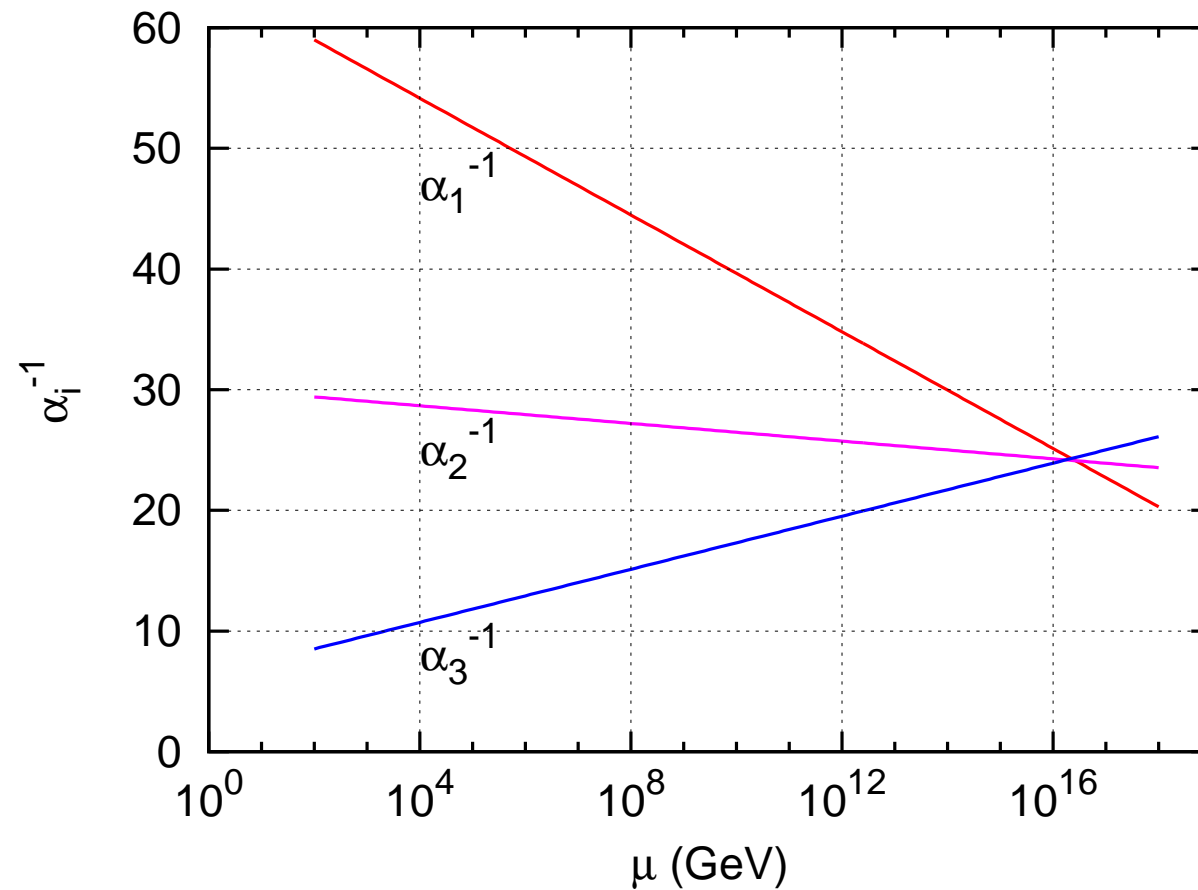
[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

This is shown in following figure



The agreement is excellent.

[Lecture 12](#)

[Renormalization](#)

[Minimal subtraction](#)

[Lecture 13](#)

[Eff gauge couplings](#)

[Applications](#)

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

- We can still go a step further. We know that supersymmetry must be broken above the electroweak scale, so what we have done is not quite correct because we are running with the MSSM content down to the weak scale.
- Of course each particle will decouple at its mass, but assuming that their masses are not much different we can assume that there will a scale M_{SUSY} , below which we will have the SM RGEs.
- We can redo the calculation taking now the evolved SM values at M_{SUSY} as the boundary conditions for the MSSM evolution. The results are shown for various values of the SUSY scale.
- We see from these results that if the SUSY scale is much higher than, say 1 TeV, the good agreement starts to disappear. Before we end we should emphasize that these are one loop results, without many fine details, like thresholds (taking in account that not all the supersymmetric particles decouple at the same scale) and the important two-loop effects.

Lecture 12

Renormalization

Minimal subtraction

Lecture 13

Eff gauge couplings

Applications

- Scale M_X
- Scale M_Z
- Standard Model
- MSSM

