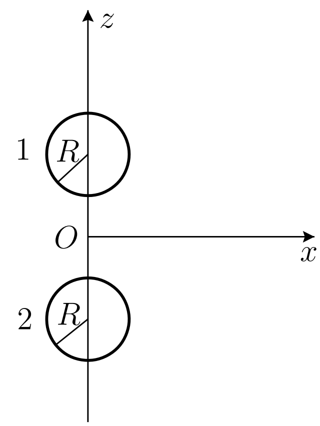
Problemas Extra de Electrostática

Recentemente deparei com o seguinte problema de electrostática, no âmbito dum curso elementar de electromagnetismo.

Considere duas esferas de raio R com centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0,0,2R)$ e $(0,0,-2R)$, respectivamente, conforme indicado na figura. A esfera 1 não é condutora e está carregada uniformemente com carga total $Q>0$. A esfera 2 é condutora e está carregada, com carga total $-Q$. Determine o potencial sobre o eixo dos z.

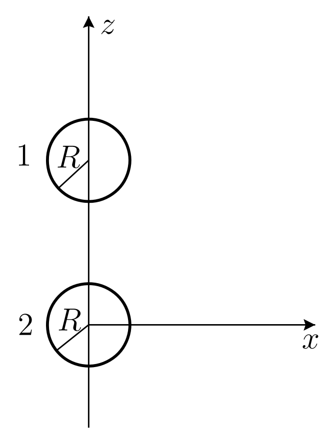


Como se tratava dum curso elementar, o que se deveria querer era que os alunos usassem o princípio da sobreposição, juntamente com a lei de Gauss para as duas esferas.

No entanto, isto é incorrecto e o problema é muito mais complicado. De facto, enquanto que a esfera 1 conserva a sua distribuição esférica mesmo em presença de outras cargas, isso não acontece com a esfera condutora. Assim, na presença da esfera 1 as cargas no condutor vão-se redistribuir na superfície, mantendo, claro, o valor total $-Q$. Assim, pensei que este problema era um bom desafio e organizei uma série de problemas encadeados que irão conduzir à solução. De facto chegaremos mesmo à solução geral em todo o espaço, fora do eixo dos z.

I

Considere duas esferas de raio R com centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0,0,4R)$ e $(0,0,0)$, respectivamente, conforme indicado na figura. A esfera 1 não é condutora e está carregada uniformemente com carga total $Q>0$. A esfera 2 é condutora e está ao potencial zero.



a) Calcule o potencial num ponto genérico do eixo dos z, isto é, $\phi(0,0,z)$. **Sugestão**: utilize o método das imagens (ver Ref.[1] pág. 38).

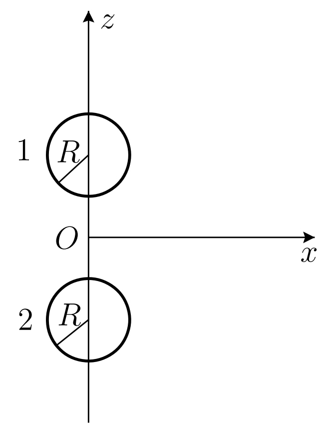
b) Verifique que a esfera condutora é uma equipotencial.

c) Determine a densidade de carga à superfície da esfera condutora, σ_2. Verifique que não é uniforme mas que se tem

$$\int_{S_2} \sigma_2 \, dS = -\frac{1}{4}\, Q$$

Comente.

II



Considere agora que as esferas têm centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0, 0, 2R)$ e $(0, 0, -2R)$, respectivamente, conforme indicado na figura ao lado. A esfera condutora 2 está agora carregada com carga total $-Q$, como no problema inicial.

a) Calcule o potencial num ponto genérico do eixo dos z, isto é, $\phi(0, 0, z)$ para $z > 2R$. **Sugestão**: utilize os resultados do problema anterior.

b) Calcule $\phi(0, 0, z)$ para $z \gg R$ e determine o momento dipolar da distribuição de cargas.

c) Calcule o momento dipolar da distribuição a partir da definição

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

e compare com o valor obtido na alínea b). **Sugestão**: Comece por mostrar que se $\sum_i q_i = 0$, então o momento dipolar da distibuição não depende da escolha da origem. Em seguida escolha a origem mais conveniente.

III

Considere a situação do problema **II**.

a) Usando o resultado (ver o livro de J.D. Jackson [2])

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \; P_l(\cos\gamma)$$

onde γ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, $r_<$ ($r_>$) é o menor (maior) valor entre $|\vec{r}|$ e $|\vec{r}'|$ e $P_l(x)$ são os polinómios de Legendre de grau l, mostre que para $|z| > 2R$,

$$\phi(0, 0, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{z^{l+1}}$$

Determine os coeficientes C_l. Verifique que

$$C_0 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0} \frac{63}{16}$$

Comente.

b) Sabendo que a solução geral da equaçao de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l \, r^l + B_l \, r^{-1(l+1)} \right) P_l(\cos\theta)$$

se pode obter a partir da solução para $\theta = 0$ (eixo dos z)

$$\phi(r, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l\, r^l + B_l\, r^{-1(l+1)} \right)$$

multiplicando por $P_l(\cos\theta)$ (ver livro do Jackson), obtenha a solução geral do potencial do problema anterior $\phi(r, \theta)$, válida em todo o espaço, para $r > 2R$.

c) Use o resultado anterior para determinar o primeiro termo não nulo do potencial sobre o eixo dos x para $x \gg R$. Comente.

d) Use o resultado da alínea b) para mostrar que sobre a esfera condutora e para $r > 2R$ se tem

$$\phi(\alpha) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2)^l - \frac{1}{4} \left(\frac{-7}{4} \right)^l - \frac{3}{4}\, (-2)^l}{(5 - 4\cos\alpha)^{\frac{l+1}{2}}} \right] P_l(\cos\theta)$$

onde

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - 2}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}}$$

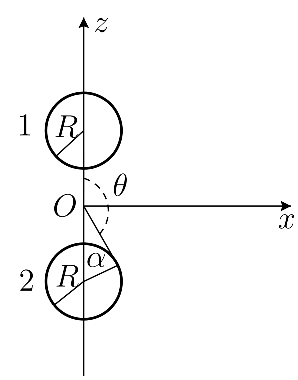
e α é o ângulo que dá a posição sobre a esfera conforme indicado na figura seguinte.

e) Some numericamente a série para mostrar que (para $r > 2R$) a esfera condutora tem potencial constante,

$$\phi = -\frac{3}{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Sugestões: Use o `Mathematica` para somar os primeiros 50 termos da série. No `Mathematica` os polinómios de Legendre são representados pela função:

$$P_n(x) = \texttt{LegendreP}[n, x]$$



f) Generalize o resultado de b) para que possa verificar que o potencial sobre a esfera condutora é constante para pontos sobre a esfera tais que $r < 2R$.

References

[1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1975).